Zusätzliche Maßtheorie Übungsbeispiele WS 03/04

Z1. Sei X eine Menge. Angenommen, für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X) gegeben, sodaß für alle $p \in X$ gilt

(U1) $\forall U \in \mathcal{U}(p)\ \ p \in U$.

(U2) $U, V \in \mathcal{U}(p) \implies U \cap V \in \mathcal{U}(p)$

(U3) $U \in \mathcal{U}(p)$ und $V \supseteq U \implies V \in \mathcal{U}(p)$

(U4) $\forall U \in \mathcal{U}(p)\, \exists V \in \mathcal{U}(p)\, \forall v \in V\ \ U \in \mathcal{U}(v)$.

Zeigen Sie, daß durch

$$O \in \tau \iff \forall x \in O\, \exists U \in \mathcal{U}(x)\ U \subseteq O$$

eine Topologie auf X gegeben ist, und daß für jedes $x \in X$ die Umgebungen von x im Sinne der Topologie τ genau die Mengen in $\mathcal{U}(x)$ sind.

Z2. Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Wenn $K \subseteq X$ kompakt ist, dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Z3. Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion, die nicht offen ist, und ein Beispiel einer offenen Funktion, die nicht stetig ist.

Z4. Ein Punkt eines topologischen Raumes X kann in Bezug auf eine Menge $A \subseteq X$ Randpunkt, innerer Punkt, Häufungspunkt oder isolierter Punkt jeweils sein oder nicht sein. Geben Sie Beispiele für alle 4 möglichen Kombinationen dieser Eigenschaften.

Als Definitionen der topologischen Begriffe (kompakt, stetig, etc.) sind die in der Vorlesung gebrachten zu verwenden.