Kapitel 7

Übungsaufgaben

7.1 Übungen zu Kapitel 1

Übung 1. Beweisen Sie, daß jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes wieder ein vollständiger metrischer Raum ist.

Übung 2. Sei X ein Raum, auf dem eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$

gegeben ist. Es sei $x \sim y$ genau dann, wenn $d(x, y) = 0$ gilt. Zeigen Sie, daß $x \sim y$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert ist. Zeigen Sie weiters, daß auf $X/\sim$ durch $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x, y)$ eine Metrik definiert ist.

Übung 3. Bestimmen Sie die Mengen:

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$
2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right)$
3. $\displaystyle\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap(0,1)} [0, r)$
4. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$
5. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$

Übung 4. Sei $f : X \to Y$ und seien $A_i \subseteq X$ und $B_i \subseteq Y$ für $i \in I$ Mengen. Zeigen Sie:

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$
$$f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

7.2 Übungen zu Kapitel 2

7.2.1 Übungen zu Kapitel 2.1

Übung 5. Sei X eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Partition ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i\in I} A_i = X$) von X. Zeigen Sie:

1. die von $(A_i)_{i\in I}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}$ besteht genau aus den Mengen der Form $\bigcup_{i\in J} A_i$ mit $J \subset I$. Die Mengen A_i heißen dann die Atome der σ-Algebra $\mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A}$ ist überabzählbar, wenn I unendlich ist.

Übung 6. Zeigen Sie, daß es keine abzählbar unendliche σ-Algebra gibt.
Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt, indem Sie annehmen, es gäbe eine abzählbare σ-Algebra $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Betrachten Sie die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}\ F_n = A_n \vee F_n = X \setminus A_n \right\}$$

und zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ eine Partition von X ist.

Übung 7. Eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Ring, wenn sie eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften besitzt:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$, und für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

2. $\emptyset \in \mathcal{R}$, und für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.

3. $\emptyset \in \mathcal{R}$, und für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Übung 8. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Algebra, wenn sie eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften besitzt:

1. $X \in \mathcal{A}$, und für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $X \setminus A \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.

2. $X \in \mathcal{A}$, und für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $X \setminus A \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Übung 9. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra (ein Ring, eine σ-Algebra, ein σ-Ring), so gilt entsprechendes auch für die Menge

$$\mathcal{A}' = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Übung 10. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann erzeugt $f^{-1}(\mathcal{F})$ die σ-Algebra $f^{-1}(\mathcal{A})$, d.h. es gilt für jede Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})).$$

Übung 11. Ist jeder Durchschnitt von Halbringen über X ein Halbring?

Übung 12. Ist die Menge $\emptyset \neq \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ durchschnittsstabil und vereinigungsstabil, so ist $\mathcal{H} = \{A \setminus B \mid A, B \in \mathcal{M}\}$ ein Halbring.

Übung 13. Zeigen Sie, daß $\mathcal{D}$ genau dann ein Dynkin-System ist, wenn

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$
2. Für alle $A \in \mathcal{D}$ gilt auch $A^c \in \mathcal{D}$
3. Für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Übung 14. Sei X überabzählbar und $\mathcal{A}$ die Familie der abzählbaren Teilmengen von X. Ferner sei

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid E \in \mathcal{A} \vee X \setminus E \in \mathcal{A}\}$$

und die Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ durch

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } E \in \mathcal{A} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra
2. μ erfüllt die Maßeigenschaften.

Bemerkung: Intervalle oder die positiven Zahlen gehören nicht zu diesem Mengensystem für $X = \mathbb{R}$.

Übung 15. Man betrachte die natürlichen Zahlen und die Mengenfunktion

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#(A \cap [1, N])$$

für Mengen $A \subset \mathbb{N}$, für die der Grenzwert existiert. Zeigen Sie, daß diese Mengenfunktion additiv aber nicht σ-additiv ist. Bestimmen Sie eine Menge $A \subset \mathbb{N}$, sodaß $\mu(A)$ nicht existiert.

7.2.2 Übungen zu Kapitel 2.2

Übung 16. Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge von Intervallen. Bestimmen Sie, wenn möglich, $\liminf I_n$ und $\limsup I_n$.

Übung 17. Zeigen Sie das Lemma 2.25:
Jede monotone Folge $(E_n)_{n\geq 1}$ von Mengen konvergiert und zwar ist

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \text{falls} \quad (E_n)_{n\geq 1} \text{ wachsend ist und}$$
$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \text{falls} \quad (E_n)_{n\geq 1} \text{ fallend ist.}$$

Übung 18. Beweisen Sie Satz 2.27:
Sei μ eine endliche, nicht-negative, additive Mengenfunktion auf dem Ring $\mathcal{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

1. μ ist σ-additiv.
2. μ ist für jedes $E \in \mathcal{R}$ stetig von unten.
3. μ ist stetig von oben für die leere Menge $\emptyset$.

Übung 19. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Für $A, B \in \mathcal{A}$ definieren wir $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$ (symmetrische Differenz).

1. Zeigen Sie, daß d symmetrisch ist und die Dreiecks-Ungleichung erfüllt.
2. Sei $A \sim B$ definiert durch $d(A, B) = 0$. Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und daß d auf dem Raum der Äquivalenzklassen $\mathcal{A}/\sim$ eine Metrik induziert.
3. Sei $A = \liminf A_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} d(A_n, A_{n+1}) < \infty$. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0$.
4. Beweisen Sie, daß $\mathcal{A}/\sim$ mit der Metrik d vollständig ist.

7.2.3 Übungen zu Kapitel 2.3

Übung 20. Welche der folgenden Mengenfunktionen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ sind äußere Maße?

1. $\mu(A) = \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \#(A \cap \{1, \cdots, n\})$
2. $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset \\ 1 & \text{für } A \neq \emptyset \end{cases}$
3. $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{für } A \text{ unendlich} \end{cases}$

Übung 21. Bestimmen Sie zu den folgenden äußeren Maßen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ das System der meßbaren Mengen:

1. $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset \\ 1 & \text{für } A \neq \emptyset. \end{cases}$

2. $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A \text{ höchstens abzählbar} \\ 1 & \text{für } A \text{ sonst.} \end{cases}$

Übung 22. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum mit einer höchstens abzählbaren Menge von Atomen $\mathcal{A}$ (siehe Übung 5). Sei $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ eine positive Mengenfunktion. Zeigen Sie, daß μ eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{A}$ fortgesetzt werden kann.

7.2.4 Übungen zu Kapitel 2.4

Übung 23. Sei X ein metrischer Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von X eine G_δ-Menge und jede offene Teilmenge von X eine F_σ-Menge.
Hinweis: Betrachten Sie für abgeschlossene $A \subset X, A \neq \emptyset$ die Menge $A_n = \{x \in X \mid \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} < \frac{1}{n}\}$.

7.2.5 Übungen zu Kapitel 2.5

Übung 24. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und μ ein σ-endliches Maß. Zeigen Sie, daß die Menge $U = \{x \in X \mid \mu(\{x\}) > 0\}$ höchstens abzählbar ist.

Übung 25. Auf $[0,1]^2$ ist durch $\mu([0,1] \times [a,b]) = b - a$ und $\mu([a,b] \times [0,1]) = b - a$ eine Mengenfunktion gegeben. Geben Sie mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen von μ zu einem Maß auf $\mathcal{B}([0,1]^2)$ an.

Übung 26. Sei $f : [0,1] \to [0,\infty)$ stetig und es gelte $\int_O f(x)dx > 0$ für alle offenen Teilmenge $O \subseteq [0,1]$. Beweisen oder widerlegen Sie: Das Lebesgue-Maß von $\{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ ist gleich 0.

Übung 27. Sei k eine positive ganze Zahl und $\{n_i\}$ eine endliche Folge positiver ganzer Zahlen, die alle kleiner als k sind. Zeigen Sie, daß die Menge der Zahlen in $[0,1]$, in deren Zifferndarstellung zur Basis k die Folge $\{n_i\}$ nicht auftritt, eine Nullmenge ist.

7.2.6 Übungen zu Kapitel 2.6

Übung 28. Ist $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ ein Maß, so ist $\eta : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty], \eta(A) := \inf\{\mu(U) : U \subset A, U \text{offen}\}$ $(A \subset X)$ ein von außen reguläres äußeres Maß. Ist μ endlich, so gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\eta (= \sigma-$Algebra der $\eta-$meßbaren Mengen) genau dann, wenn μ von außen regulär ist, d.h. wenn $\eta|\mathcal{B} = \mu$ ist.

7.2.7 Übungen zu Kapitel 2.7

Übung 29. Zeigen Sie die Bemerkung auf Seite 43:
Sei $p \in \mathbb{N}$ und $s < p$, dann ist $\mathcal{H}^s$ als Maß auf $\mathbb{R}^p$ nicht σ-endlich.

Übung 30. Schätzen Sie die Hausdorffdimension der verallgemeinerten Cantormenge im $\mathbb{R}^2$ nach oben ab.

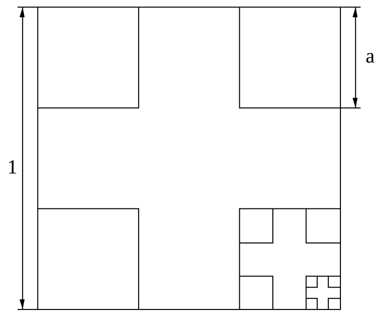

Abbildung 7.1: verallgemeinerte Cantormenge

7.2.8 Übungen zu Kapitel 2.8

Übung 31. Beweisen Sie Satz 2.66:
Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring über der Menge X. Dann ist der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring $\mathcal{R}$ durch

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \right\}$$

gegeben.

Übung 32. Zeigen Sie Satz 2.67 über die Eindeutigkeit der Fortsetzung eines Inhalts auf einem Halbring $\mathcal{H}$ auf den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$.

Übung 33. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = \min(x, y)$ gegeben. Zeigen Sie, daß durch

$$\mu([a, b) \times [c, d)) = f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c)$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gegeben ist. Berechnen Sie

$$\mu\left(\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}\right).$$

Übung 34. Es sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Für jede Folge $(A_n)_{n \geq 0}$ von Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gelte $\mu(A_n) \downarrow 0$. Zeigen Sie, daß μ ein Prämaß ist.

Übung 35. Auf $\mathcal{H} = \{I \subset \mathbb{Z} \mid I = a + n\mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\} \cup \emptyset$ ist durch $\mu(a + n\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}$ eine Mengenfunktion gegeben. Zeigen Sie, daß μ ein Inhalt ist. Ist μ auch ein Prämaß? Bestimmen Sie das durch μ gegebene Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

7.3 Übungen zu Kapitel 3

7.3.1 Übungen zu Kapitel 3.1

Übung 36. Zeigen Sie das Lemma 3.2:
Sei $f : (X, \mathcal{A}_1) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ eine Abbildung und sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_2$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}_2$, so ist f genau dann $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-meßbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_1$.

Übung 37. Es seien $(X, \mathcal{A}_1)$ und $(Y, \mathcal{A}_2)$ Meßräume und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{A}_1$. Weiters seien Abbildungen $f_n : A_n \to Y$ gegeben. Die Abbildung $f : X \to Y$ sei durch $f(x) := f_n(x)$, falls $x \in A_n$ definiert. Zeigen Sie, daß die Abbildung f genau dann $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-meßbar ist, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f_n : (A_n, \mathcal{A}_1|_{A_n}) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ meßbar ist.

Übung 38. Seien $(X, \mathcal{A}_1, \mu)$, $(Y, \mathcal{A}_2, \nu)$ Maßräume mit den Vervollständigungen $(X, \overline{\mathcal{A}_1}, \overline{\mu})$ und $(Y, \overline{\mathcal{A}_2}, \overline{\nu})$. Weiters sei $f : (X, \mathcal{A}_1) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ meßbar und es gelte für jede ν-Nullmenge $C \in \mathcal{A}_2$ $\mu(f^{-1}(C)) = 0$. Zeigen Sie: Die Abbildung $f : (X, \overline{\mathcal{A}_1}) \to (Y, \overline{\mathcal{A}_2})$ ist meßbar. Ist insbesondere $\nu = f(\mu)$ so ist $f : (X, \overline{\mathcal{A}_1}) \to (Y, \overline{\mathcal{A}_2})$ meßbar und $\overline{\nu} = f(\overline{\mu})$.

Übung 39. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

1. Wenn f meßbar ist, dann ist auch $|f|$ meßbar.

2. Ist die Umkehrung richtig?

Übung 40. Zeigen Sie den Satz 3.6:
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, Y ein metrischer Raum auf $f : X \to Y$. Dann gilt: Sei $\mathcal{M}$ die Familie aller Mengen $E \subseteq Y$ mit $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

Übung 41. Sei $\xi_n : \mathbb{R} \to \{0, \ldots, 9\}$ gegeben durch die n-te Ziffer nach dem Komma von x in Dezimaldarstellung (im Falle von Mehrdeutigkeit wählen wir die Ziffernentwicklung, die auf $000\ldots$ endet). Zeigen Sie, daß ξ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-meßbar ist.

Übung 42. Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-meßbar.

Übung 43. Beweisen Sie: Das Bild-Maß eines σ-endlichen Maßes braucht nicht σ-endlich zu sein.

7.3.2 Übungen zu Kapitel 3.3

Übung 44. Sei f_n eine Folge meßbarer Funktionen und

$$E := \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert}\}.$$

Beweisen Sie, daß die Menge E meßbar ist.

Übung 45. Zeigen Sie, daß $\frac{df}{dx}$ Borel-meßbar ist, falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

7.3.3 Übungen zu Kapitel 3.4

Übung 46. Beweisen Sie den sechsten Punkt des Satzes 3.24:
$\int_E f(x)\, d\mu(x) = 0$ genau dann, wenn $\mu\{f > 0\} = 0$

Übung 47. Seien A und B zwei Teilmengen der Menge X und $\mathcal{A}$ die von A und B erzeugte σ-Algebra. Weiters sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ mit

$$\mu(A) = \frac{8}{25}, \quad \mu(B) = \frac{1}{4}, \quad \mu(A \cap B) = \frac{2}{25}.$$

Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in A \setminus B \\ -1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f meßbar ist, und bestimmen Sie $\int_X f\, d\mu$.

Übung 48. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, in dem jede Menge $A \in \mathcal{A}$ von positivem Maß eine Menge B mit endlichem positiven Maß enthält, so gilt:

$$\int_A f\, d\mu \geq \int_A g\, d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \quad \text{genau dann, wenn } f \geq g\ \mu - \text{fast überall.}$$

7.3.4 Übungen zu Kapitel 3.5

Übung 49. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Beweisen Sie:

1. f ist genau dann μ-integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu\left(\left\{x \in X \mid 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\}\right)$$

   konvergiert.

2. Wenn $\mu(X) < \infty$ gilt, dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > n\}\right)$$

   konvergiert.

Übung 50. Sei

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-t^2 x} \frac{\sinh 2tx}{\sinh x}\, dx.$$

1. Zeigen Sie für $t^2 \neq 1$, daß
$$I(t) = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1+t^2)^2 - 4t^2}.$$

2. Zeigen Sie weiters, daß $\lim_{t\to 1} \left\{ I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2} \right\} = \frac{3}{4}$.

Übung 51. Zeigen Sie das Lemma 3.29:
Seien $a_{ij} \geq 0$ und $i, j \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

Übung 52. Die Funktion f sei auf $(0,1)$ definiert als
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ rational} \\ [1/x]^{-1} & \text{für } x \text{ irrational,} \end{cases}$$
wobei $[x]$ das größte Ganze von x bezeichnet.
Zeigen Sie, daß $\int_0^1 f \, dx = \infty$.

Übung 53. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß im Lemma von Fatou im allgemeinen strikte Ungleichung gilt.

Übung 54. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f\colon X \to [0, \infty]$ meßbar und
$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = c \quad \text{wobei} \quad 0 < c < \infty.$$
Beweisen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) d\mu(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ c & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 & \text{für } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Übung 55. Sei $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n,\infty)}(x)$. Zeigen Sie, daß f_n gleichmäßig und monoton gegen die Nullfunktion strebt, aber daß
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda.$$

Übung 56. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \, dx$.

Übung 57. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} \, dx$.

Übung 58. Berechnen Sie die Integrale in den Beispielen 56 und 57 ohne Verwendung der Maßtheorie!

Übung 59. Die Funktionen f_n und g_n seien durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{für } 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} & \text{für } 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

1. Zeigen Sie $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx \cdot \int_0^\infty g_n(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{4}$
2. Leiten Sie daraus $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ her.

Übung 60. Seien E_k für $k = 1, 2, \ldots$ meßbare Mengen in $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $\sum_{k=1}^\infty \mu(E_k) < \infty$. Zeigen Sie, daß μ-fast alle x in höchstens endlich vielen E_k liegen.

Übung 61. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge meßbarer Funktionen. Beweisen Sie, daß die Folge f_n μ-fast überall gegen 0 konvergiert, wenn $\sum_n \mu(\{x \in X \mid |f_n(x)| > \varepsilon\})$ für alle $\varepsilon > 0$ konvergiert.

7.3.5 Übungen zu Kapitel 3.6

Übung 62. Zeigen Sie, daß $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$ liegt, wenn X lokal-kompakt ist.

Übung 63. Es sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer Funktionen auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gegeben. Ferner sei $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\,d\mu < \infty$ und $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. Zeigen Sie, daß

1. $f(x) \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$
2. $\int_X f(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n(x)\,d\mu$

gilt.

Übung 64. Sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}$. Beweisen Sie $0 < f_n(x) < x^{-\frac{1}{3}}$ für $x > 0$ und berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

a) unter Verwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz, b) direkt.

Übung 65. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, gegen f gleichmäßig konvergente Folge meßbarer Funktionen. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Bemerkung: In einem endlichen Maßraum gilt stets, daß eine beschränkte, meßbare Funktion integrierbar ist, denn $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu \leq \mu(X) \sup |f| < \infty$.

Übung 66. Zeigen Sie, daß

1. $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1+x^2} \, dx = 0$ für $a > 0$, aber nicht für $a = 0$.

2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^p x^r \log x}{1+n^2 x^2}$ für $r > 0$ und $0 < p < \min(2, 1+r)$.

Übung 67. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(X) < \infty$. Sei $f \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ eine Funktion mit $\|f\|_\infty > 0$ und sei $\alpha_n := \int_X |f(x)|^n \, d\mu(x)$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty.$$

Übung 68. Seien f und g beliebige meßbare Funktionen.

1. Zeigen Sie, daß $\operatorname{ess\,sup}(f+g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$ gilt.
   Geben Sie auch ein Beipiel für die strikte Ungleichung an.

2. Sei $f = g$ f.ü. und f eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß $\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g = \sup f$.

Übung 69. Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ mit $\left|\int_X f \, d\mu\right| = \int_X |f| \, d\mu$. Zeigen Sie, daß ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha f = |f|$ μ-fast überall existiert.

Übung 70. Zeigen Sie für eine Funktion $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ folgende Stetigkeitsaussage:

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \quad \text{gibt es ein } \delta > 0, \quad \text{sodaß } \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon, \quad \text{falls } \mu(E) < \delta.$$

Übung 71. Zeigen Sie die Bemerkung auf Seite 68: Sei $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann ist ϕ stetig auf (a, b).

Übung 72. Gegeben sei ein endlicher Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Funktion $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$. Ferner sei $S \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen.
Zeigen Sie folgende Aussage über den Integralmittelwert

$$\text{falls } A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in S \quad \text{für alle } E \quad \text{mit } \mu(E) > 0,$$

dann gilt $f(x) \in S$ für fast alle x.

Übung 73. Zeigen Sie die Bemerkung auf Seite 75:
Der Raum $C_c(\mathbb{C}, X)$ liegt nicht dicht im $L^\infty_\mathbb{C}(X, \mu)$.

Übung 74. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Weiters bezeichne $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |z - u| < r\}$. Das *essentielle Bild* von f wird durch

$$\operatorname{ess\,Im}(f) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0 : \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0\right\}$$

definiert. Zeigen Sie:

1. Seien f und g zwei verschiedene Repräsentanten eines Elements von $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gilt $\operatorname{ess\,Im}(f) = \operatorname{ess\,Im}(g)$.
2. $\operatorname{ess\,Im}(f) \subseteq \overline{B(0, \|f\|_\infty)}$
3. $\operatorname{ess\,Im}(f)$ ist kompakt.
4. $\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Im}(f)) = 0$

Übung 75. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Zeigen Sie, daß dann

1. $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ für $0 < r < s \leq \infty$
2. $L^r(\mu) \supseteq L^s(\mu)$

gilt.

7.3.6 Übungen zu Kapitel 3.7

Übung 76. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. Zeigen Sie, daß dann $\int_X f\, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\})\, dt$ gilt, wobei das rechte Integral ein uneigentliches Riemann-Integral ist.

Übung 77. Sei $X = [0, 1]$ und $\mu = \mathcal{H}|_\mathcal{C}$, das auf die Cantor-Menge eingeschränkte Hausdorff-Maß der Dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$. Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral

$$\int_\mathcal{C} x^\alpha \, d\mu(x)$$

endlich. Berechnen Sie das Integral für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = -\frac{1}{2}$ numerisch auf 5 Stellen.

Übung 78. Welche der folgenden Funktionen f, g, h sind uneigentlich Riemann-integrierbar bzw. Lebesgue-integrierbar über I?

1. $f(x) = x/\sqrt{1 + x^4}$, $I = \mathbb{R}$

2. $g(x) = \sin x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}),\ I =]0, \infty[$

3. $h(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2},\ I =]0, 1[$

Übung 79. Für $s > 0$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x^{\frac{1}{s}}} = 2\Gamma(s+1)L(s),$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet und $L(s) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n/(2n+1)^s$.

Übung 80. Die Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien durch

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt \quad \text{und } G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\, dt$$

gegeben. Zeigen Sie:

1. F und G sind stetig auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie $F(0)$ und $G(0)$.

2. $F(0) - F(x) + G(x) = C|x|$ mit $C = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$

3. G ist zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt $G'' = F$

4. Bestimmen Sie C.

Übung 81. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Verknüpfung von zwei Riemann-integrierbaren Funktionen nicht Riemann-integrierbar sein muß.

Übung 82. Geben Sie ein Beispiel einer offenen Menge, die nicht Jordan-meßbar ist.

Übung 83. Sei $1 < p < \infty$ und $f \in L^p([0,\infty], \lambda)$. Zeigen Sie für die Funktion $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$ die Ungleichung von Hardy:

$$\|F(x)\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

7.3.7 Übungen zu Kapitel 3.8

Übung 84. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_{n,k} : X \to \mathbb{C}$ eine Folge meßbarer Funktionen. Zeigen Sie: Falls $f_{n,k} \to f_n$ für $k \to \infty$ im Maße und $f_n \to f$ im Maße konvergieren, dann gibt es eine Folge k_n, sodaß f_{n,k_n} für $n \to \infty$ im Maße gegen f konvergiert.

Übung 85. Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$. Vergleichen Sie die verschiedenen Konvergenzbegriffe.

Übung 86. Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ ein Maßraum mit dem Zählmaß ζ. Vergleichen Sie wiederum die verschiedenen Konvergenzbegriffe.

Übung 87. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Beweisen Sie, daß durch

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \, d\mu(x)$$

eine vollständige Metrik auf dem Raum der reellen meßbaren Funktionen (modulo Gleichheit μ-fast überall) gegeben ist. Zeigen Sie weiters, daß $d(f_n, f) \to 0$ genau dann gilt, wenn $f_n \to f$ im Maß μ.

Übung 88. Kontruieren Sie eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$, sodaß $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 0$ aber die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in keinem Punkt $x \in [0,1]$ konvergiert.

Übung 89. Stellen Sie in den folgenden Beispielen fest, in welchem Sinne die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ konvergieren:

1. $f_n(x) = (\cos x)^n$
2. $f_n(x) = (\cos nx)^n$
3. $f_n(x) = \cos nx$
4. $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$

7.4 Übungen zu Kapitel 4

7.4.1 Übungen zu Kapitel 4.1

Übung 90. Seien μ und ν $\sigma-$endlich und sei μ nicht absolut stetig bezüglich ν und umgekehrt. Gilt dann, daß $\mu \perp \nu$?

Übung 91. Beweisen Sie das Lemma 4.12!

1. Wenn λ auf A konzentriert ist, dann auch $|\lambda|$.
2. Wenn $\lambda_1 \perp \lambda_2$, dann $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.
3. Wenn $\lambda_1 \perp \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu$, dann $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.
4. Wenn $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \ll \mu$, dann $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.
5. Wenn $\lambda \ll \mu$, dann $|\lambda| \ll \mu$.
6. Wenn $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu$, dann $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
7. Wenn $\lambda \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu$, dann $\lambda = 0$.

Übung 92. Sei $\mathcal{M}(X)$ der Raum der komplexen Borelmaße auf dem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie, daß durch $\|\mu\| = |\mu|(X)$ eine Norm auf $\mathcal{M}(X)$ definiert wird. Zeigen Sie weiters, daß dieser Raum ein Banach-Raum ist. Diesen Konvergenzbegriff für Maße nennt man die *starke Konvergenz*.

Übung 93. Sei (X, d) ein lokalkompakter metrischer Raum und $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$ eine σ-Algebra auf X. Sei $\mu_n : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Maße und $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U) = \mu(U) \quad \text{für alle offenen Mengen } U$$

äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f\, d\mu_n = \int_X f\, d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c(\mathbb{C}, X)$$

ist. Diesen Konvergenzbegriff für Maße nennt man die *schwache Konvergenz*.

Übung 94. Zeigen Sie, daß die starke Konvergenz von Maßen die schwache Konvergenz impliziert. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß die Umkehrung falsch ist.

7.4.2 Übungen zu Kapitel 4.2

Übung 95. Geben Sie unter Verwendung des Satzes 4.16 einen Beweis des Lebesgueschen Zerlegungssatzes für Maße: Seien μ und ν σ-endliche Maße auf dem Meßraum $(X, \mathcal{A})$. Dann gibt es genau eine Zerlegung $\nu = \rho + \sigma$ mit $\rho \ll \mu$ und $\sigma \perp \mu$.
Hinweis: betrachten Sie das Maß $\tau = \mu + \nu$ und die Radon-Nikodým-Dichte $g = \frac{d\nu}{d\tau}$. Mit $N = \{x \in X \mid g(x) = 1\}$ gibt dann $\rho(A) = \nu(A \cap N)$ und $\sigma(A) = \nu(A \cap N^c)$ eine solche Zerlegung.

Übung 96. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x \leq 1 \\ 3x^2, & 1 < x \leq 2 \\ 13, & x > 2 \end{cases}$$

Nun wird durch $\mu([-\infty, x)) = f(x)$ ein Maß definiert. Geben Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ und die Radon-Nikodým-Dichte des stetigen Anteils an!

Übung 97. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x+1, & 0 < x \leq 1 \\ 3x^2+1, & 1 < x \leq 2 \\ 2x^3, & 2 < x \leq 3 \\ 128, & x > 3 \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3x, & 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 + 1, & 1 < x \leq 2 \\ 5x^2, & 2 < x \leq 4 \\ 108, & x > 4 \end{cases}$$

Sei μ durch $\mu((-\infty, x]) = f(x)$ und ν durch $\nu((-\infty, x]) = g(x)$ gegeben. Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ bezüglich ν und die Radon-Nikodým-Dichte des absolut stetigen Anteils.

7.4.3 Übungen zu Kapitel 4.3

Übung 98. Gibt es eine signierte Maßfunktion ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit $\nu(\{n\}) = (-1)^n \frac{1}{n}$?

Übung 99. Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$, $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ und $d\nu = f\, d\mu$ ein komplexes Maß. Zeigen Sie, daß $d|\nu| = |f|\, d\mu$ gilt.

7.4.4 Übungen zu Kapitel 4.4

Übung 100. Sei ν ein signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und sei $\nu(\mathcal{A}) \subset [-\infty, \infty)$. Zeigen Sie, daß es für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine positive Menge $P \in \mathcal{A}$ mit $P \subset A$ gibt mit $\nu(P) \geq \nu(A)$
Hinweis: Zeigen Sie zuerst indirekt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \subset A$ mit $\nu(A_\varepsilon) \geq \nu(A)$ gibt, sodaß $\nu(B) \geq -\varepsilon$ für alle $B \subset A_\varepsilon$ gilt. Betrachten Sie dann die Mengen $A_{\frac{1}{n}}$.

Übung 101. Geben Sie einen Beweis des Hahnschen Zerlegungssatzes ohne Verwendung des Satzes von Radon-Nikodým.
Hinweis: Verwenden Sie Übung 100, um für $\alpha = \sup\{\nu(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Folge positiver Mengen P_n mit $\nu(P_n) \to \alpha$ zu konstruieren. Zeigen Sie, daß $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ die gesuchte positive Menge ist.

Übung 102. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Hahnschen Zerlegung: Sei ν ein signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Seien P, N und P', N' zwei verschiedene Zerlegungen von X. Dann sind $P \triangle P'$ und $N \triangle N'$ ν-Nullmengen.

7.4.5 Übungen zu Kapitel 4.5

Übung 103. Beweisen Sie Satz 4.17:
Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f(x) = \mu((-\infty, x))$ gegeben. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Die Funktion f ist differenzierbar in x und $f'(x) = a$

(b) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodaß

$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - a\right| < \varepsilon$$

für jedes offene Intervall I, das x enthält und dessen Länge $< \delta$ ist.

Übung 104. Seien f und g absolut stetige Funktionen. Ist dann $f \circ g$ notwendigerweise absolut stetig?

Übung 105. Beweisen Sie Satz 4.25: Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \lambda)$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\lambda$$

gegeben. Dann gilt $F'(x) = f(x)$ in jedem Lebesgue-Punkt von f und daher λ-fast überall.

7.4.6 Übungen zu Kapitel 4.7

Übung 106. Zeigen Sie den Satz 4.39: Seien f und g Funktionen auf $[a, b]$, f sei differenzierbar auf $[a, b]$ und seien f' und g integrierbar. Dann gilt

$$\int_a^b g \, df = \int_a^b g f' \, dx.$$

Übung 107. Beweisen Sie Satz 4.35: Sei f bezüglich g auf $[a, b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar, dann ist auch g bezüglich f auf $[a, b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f \, dg + \int_a^b g \, df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Übung 108. Konstruieren Sie eine stetige monotone Funktion f auf $\mathbb{R}$, sodaß f auf keinem Intervall konstant ist, aber $f' = 0$ fast überall.

7.5 Übungen zu Kapitel 5

7.5.1 Übungen zu Kapitel 5.1

Übung 109. Für $i, j \in \mathbb{N}$ sei $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, sodaß $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$ gilt. Zeigen Sie, daß dann

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

gilt.

Übung 110. Sei $f \in L(0,\infty)(:=$ integrierbar auf $(0,\infty))$ und für $\alpha > 0$ und $x > 0$ sei $g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt$.
Zeigen Sie, daß $\alpha \int_0^y g_\alpha(x)\, dx = g_{\alpha+1}(y), y > 0$.

Übung 111. Sei $\alpha > 0$, $f \geq 0$, $f \in L(0,a)$ und $F(x) = \int_0^x f\, dt$. Zeigen Sie, daß

$$\int_0^a f(x) \log \frac{1}{x}\, dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x}\, dx + F(a) \log \frac{1}{a},$$

wenn beide Integrale endlich sind.

Übung 112. Es sei $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Übung 113. Sei (X_1,μ_1) und (X_2,μ_2) σ-endlich. Zeigen Sie, daß $L^1(X_1,\mu_1) \otimes L^1(X_2,\mu_2) := span\{f_1(x_1) f_2(x_2) \mid f_1 \in L^1(X_1,\mu_1), f_2 \in L^1(X_2,\mu_2)\}$ dicht in $L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ liegt.

Übung 114. Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x^2+y^2+z^2)^2 \leq \frac{64}{x^2+y^2} \right\}.$$

Übung 115. Berechnen Sie das Integral

$$\underset{B}{\int \cdots \int} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}\, d\lambda_p(x_1,\ldots,x_p)$$

für $\alpha_i \in (-1,\infty)$ über den Bereich $B = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq 0, x_1 + \ldots + x_p \leq 1\}$.

Übung 116. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 x_2 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Übung 117. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Was folgern Sie daraus für die Funktionenfolge $f_n : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x_1,x_2,\ldots) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ für $n \to \infty$?

Übung 118. Berechnen Sie das Volumen der p-dimensionalen Kugel mit Radius R.

Übung 119. Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$!

Übung 120. Für $i = 1, 2$ seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein σ-endliche Maßräume und $f_i : X_i \to (\mathbb{R}^+)$ positive meßbare Funktionen. Zeigen Sie:

1. $\nu_i = \int f_i \, d\mu_i$ ist eine σ-endliche Mengenfunktion.
2. $(\nu_1 \otimes \nu_2)(A) = \int_A f_1(x) f_2(y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y)$.

Übung 121. Für $n \geq 1$ sei $f(x, y) = 2^{2n}$ für $2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}$ und $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$. Sei $f(x, y) = -2^{2n+1}$ für $2^{-n-1} \leq x < 2^{-n}$, $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$, und sei $f = 0$ auf dem verbleibenden Teil von $[0, 1] \times [0, 1]$, der für ein n nicht in einem dieser Rechtecke enthalten ist. Zeigen Sie, daß

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) \, dx = 0, \text{ aber} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \, dy = 1.$$

Übung 122. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, und sei $F \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie, daß $(\mu_1 \times \mu_2)(F) = 0$ genau dann gilt, wenn $\mu_1(F_y) = 0$ μ_2-fast überall ist.

Übung 123. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

im Riemann'schen Sinne.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty e^{-tx} \, dt = \frac{1}{x}$ und den Satz von Fubini (Vorsicht!).

Übung 124. Zeigen Sie, daß die Funktion $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$ im Sinne von Lebesgue nicht integrierbar ist!

Übung 125. Sei $f : [1, \infty) \times [0, 1]$ durch $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ gegeben. Zeigen Sie, daß

$$\int_1^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx < 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_1^\infty f(x, y) \, dx \right) dy > 0.$$

Was folgern Sie daraus?

Übung 126. Sei $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ gegeben. Zeigen Sie, daß

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

gilt, aber daß die Funktion f dennoch nicht integrierbar ist.

Übung 127. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Für zwei Funktionen $f_1 : X_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 : X_2 \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $f_1 \otimes f_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ die Funktion $f_1 \otimes f_2 : (x_1, x_2) \to f_1(x_1) f_2(x_2)$. Zeigen Sie, daß

$$\int_{X_1 \times X_2} f_1 \otimes f_2 \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} f_1 \, d\mu_1 \cdot \int_{X_2} f_2 \, d\mu_2,$$

wenn f_1 und f_2 integrierbar sind.

Übung 128. Sei A eine positiv definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\, d\lambda^n(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}}.$$

Übung 129. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit dem durch $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definierten Produktmaß. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\alpha + x_1)(\alpha + x_2)\cdots(\alpha + x_n)$$

integrierbar?

Übung 130. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit den durch $\mu_s(\{0\}) = s$ und $\mu_s(\{1\}) = 1 - s$ definierten Produktmaßen für $0 < s < 1$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = 1 - s$$

im Maß μ_s gilt. Was folgt daraus für die Maße μ_s für verschiedene Werte von s?

Übung 131. Seien μ und ν zwei verschiedene Maße auf dem Meßraum $(X, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, daß die Produktmaße $\mu^{\mathbb{N}}$ und $\nu^{\mathbb{N}}$ auf dem unendlichen Produktraum $X^{\mathbb{N}}$ zueinander singulär sind.

Übung 132. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit dem durch $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definierten Produktmaß. Sei $T : X \to \mathbb{R}$ mit

$$T(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n.$$

Bestimmen Sie das Bildmaß $T(\mu)$.

Übung 133. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit dem durch $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definierten Produktmaß. Sei $T : X \to \mathbb{R}$ mit

$$T(x_1, x_2, \ldots) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} x_n.$$

Zeigen Sie, daß das Bildmaß von μ unter T das Hausdorffmaß auf der Cantormenge ist.

Übung 134. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine absolut stetige Funktion; ferner existiere der Grenzwert $f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Zeigen Sie, daß dann

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = (f(\infty) - f(0)) \log \frac{b}{a}$$

gilt.
Hinweis: Schreiben Sie den Integranden als Integral und verwenden Sie den Satz von Fubini.

Übung 135. Verwenden Sie Übung 134, um das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \prod_{n=1}^\infty \left(1 - e^{-2^n x}\right) \frac{dx}{x}$$

zu berechnen.

Übung 136. Es sei $f : [a,b] \to [0,\infty[$ Borel-meßbar und

$$K := \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$$

der durch Rotation der Ordinatenmenge von f um die $x-$Achse entstehende Rotationskörper. Dann ist K Borel-meßbar, und es gilt:

$$\lambda^3(K) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Übung 137. Prüfen Sie, welche der Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy, \; \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$$

für die folgenden Funktionen existieren und übereinstimmen:

1. $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$ für $x, y > 0$.
2. $f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}((x^2-y^2)^2/(x^2+y^2)^2)$ für $x, y > 0$.

Übung 138. Die Funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ sei stetig, die uneigentlichen Riemann-Integrale

$$\int_0^\infty f(t) \log t \, dt, \; \int_0^\infty f(t)\, dt$$

seien (nicht notwendigerweise absolut) konvergent, und es gelte : $\int_0^\infty f(t)\, dt = 0$. Zeigen Sie, daß dann für alle $a, b > 0$ gilt:

$$\int_0^a \left(\int_b^\infty f(xy)\, dy \right) dx - \int_b^\infty \left(\int_0^a f(xy)\, dy \right) dx = \int_0^\infty f(t) \log t \, dt.$$

Übung 139. Berechnen Sie unter Benutzung geeigneter Koordinaten das Volumen

- des Teils der Kugel $(x-a)^2+y^2+z^2 \leq a^2$, der durch die Zylinderfläche $(x-a)^2+y^2 = b^2$ $(a^2 > b^2)$ herausgeschnitten wird.
- des Körpers, der von der Ebene $z = 0$ und den Flächen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ und $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ begrenzt wird.