Übung 92. Sei $\mathcal{M}(X)$ der Raum der komplexen Borelmaße auf dem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie, daß durch $\|\mu\| = |\mu|(X)$ eine Norm auf $\mathcal{M}(X)$ definiert wird. Zeigen Sie weiters, daß dieser Raum ein Banach-Raum ist. Diesen Konvergenzbegriff für Maße nennt man die *starke Konvergenz*.

Übung 93. Sei (X, d) ein lokalkompakter metrischer Raum und $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$ eine σ-Algebra auf X. Sei $\mu_n : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Maße und $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U) = \mu(U) \quad \text{für alle offenen Mengen } U$$

äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f\, d\mu_n = \int_X f\, d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c(\mathbb{C}, X)$$

ist. Diesen Konvergenzbegriff für Maße nennt man die *schwache Konvergenz*.

Übung 94. Zeigen Sie, daß die starke Konvergenz von Maßen die schwache Konvergenz impliziert. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß die Umkehrung falsch ist.

7.4.2 Übungen zu Kapitel 4.2

Übung 95. Geben Sie unter Verwendung des Satzes 4.16 einen Beweis des Lebesgueschen Zerlegungssatzes für Maße: Seien μ und ν σ-endliche Maße auf dem Meßraum $(X, \mathcal{A})$. Dann gibt es genau eine Zerlegung $\nu = \rho + \sigma$ mit $\rho \ll \mu$ und $\sigma \perp \mu$.
Hinweis: betrachten Sie das Maß $\tau = \mu + \nu$ und die Radon-Nikodým-Dichte $g = \frac{d\nu}{d\tau}$. Mit $N = \{x \in X \mid g(x) = 1\}$ gibt dann $\rho(A) = \nu(A \cap N)$ und $\sigma(A) = \nu(A \cap N^c)$ eine solche Zerlegung.

Übung 96. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x + 1, & 0 < x \le 1 \\ 3x^2, & 1 < x \le 2 \\ 13, & x > 2 \end{cases}$$

Nun wird durch $\mu([-\infty, x)) = f(x)$ ein Maß definiert. Geben Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ und die Radon-Nikodým-Dichte des stetigen Anteils an!

Übung 97. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x + 1, & 0 < x \le 1 \\ 3x^2 + 1, & 1 < x \le 2 \\ 2x^3, & 2 < x \le 3 \\ 128, & x > 3 \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3x, & 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 + 1, & 1 < x \leq 2 \\ 5x^2, & 2 < x \leq 4 \\ 108, & x > 4 \end{cases}$$

Sei μ durch $\mu((-\infty, x]) = f(x)$ und ν durch $\nu((-\infty, x]) = g(x)$ gegeben. Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ bezüglich ν und die Radon-Nikodým-Dichte des absolut stetigen Anteils.

7.4.3 Übungen zu Kapitel 4.3

Übung 98. Gibt es eine signierte Maßfunktion ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit $\nu(\{n\}) = (-1)^n \frac{1}{n}$?

Übung 99. Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$, $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ und $d\nu = f\, d\mu$ ein komplexes Maß. Zeigen Sie, daß $d|\nu| = |f|\, d\mu$ gilt.

7.4.4 Übungen zu Kapitel 4.4

Übung 100. Sei ν ein signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und sei $\nu(\mathcal{A}) \subset [-\infty, \infty)$. Zeigen Sie, daß es für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine positive Menge $P \in \mathcal{A}$ mit $P \subset A$ gibt mit $\nu(P) \geq \nu(A)$
Hinweis: Zeigen Sie zuerst indirekt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \subset A$ mit $\nu(A_\varepsilon) \geq \nu(A)$ gibt, sodaß $\nu(B) \geq -\varepsilon$ für alle $B \subset A_\varepsilon$ gilt. Betrachten Sie dann die Mengen $A_{\frac{1}{n}}$.

Übung 101. Geben Sie einen Beweis des Hahnschen Zerlegungssatzes ohne Verwendung des Satzes von Radon-Nikodým.
Hinweis: Verwenden Sie Übung 100, um für $\alpha = \sup\{\nu(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Folge positiver Mengen P_n mit $\nu(P_n) \to \alpha$ zu konstruieren. Zeigen Sie, daß $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ die gesuchte positive Menge ist.

Übung 102. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Hahnschen Zerlegung: Sei ν ein signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Seien P, N und P', N' zwei verschiedene Zerlegungen von X. Dann sind $P \triangle P'$ und $N \triangle N'$ ν-Nullmengen.

7.4.5 Übungen zu Kapitel 4.5

Übung 103. Beweisen Sie Satz 4.17:
Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f(x) = \mu((-\infty, x))$ gegeben. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Die Funktion f ist differenzierbar in x und $f'(x) = a$

(b) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodaß

$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - a\right| < \varepsilon$$

für jedes offene Intervall I, das x enthält und dessen Länge $< \delta$ ist.

Übung 104. Seien f und g absolut stetige Funktionen. Ist dann $f \circ g$ notwendigerweise absolut stetig?

Übung 105. Beweisen Sie Satz 4.25: Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \lambda)$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\lambda$$

gegeben. Dann gilt $F'(x) = f(x)$ in jedem Lebesgue-Punkt von f und daher λ-fast überall.

7.4.6 Übungen zu Kapitel 4.7

Übung 106. Zeigen Sie den Satz 4.39: Seien f und g Funktionen auf $[a, b]$, f sei differenzierbar auf $[a, b]$ und seien f' und g integrierbar. Dann gilt

$$\int_a^b g \, df = \int_a^b g f' \, dx.$$

Übung 107. Beweisen Sie Satz 4.35: Sei f bezüglich g auf $[a, b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar, dann ist auch g bezüglich f auf $[a, b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f \, dg + \int_a^b g \, df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Übung 108. Konstruieren Sie eine stetige monotone Funktion f auf $\mathbb{R}$, sodaß f auf keinem Intervall konstant ist, aber $f' = 0$ fast überall.

7.5 Übungen zu Kapitel 5

7.5.1 Übungen zu Kapitel 5.1

Übung 109. Für $i, j \in \mathbb{N}$ sei $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, sodaß $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$ gilt. Zeigen Sie, daß dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

gilt.

Übung 110. Sei $f \in L(0,\infty)(:=$ integrierbar auf $(0,\infty))$ und für $\alpha > 0$ und $x > 0$ sei $g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt$.
Zeigen Sie, daß $\alpha \int_0^y g_\alpha(x)\,dx = g_{\alpha+1}(y), y > 0$.

Übung 111. Sei $\alpha > 0$, $f \geq 0$, $f \in L(0,a)$ und $F(x) = \int_0^x f\,dt$. Zeigen Sie, daß

$$\int_0^a f(x) \log \frac{1}{x}\,dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x}\,dx + F(a) \log \frac{1}{a},$$

wenn beide Integrale endlich sind.

Übung 112. Es sei $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Übung 113. Sei (X_1,μ_1) und (X_2,μ_2) σ-endlich. Zeigen Sie, daß $L^1(X_1,\mu_1) \otimes L^1(X_2,\mu_2) := span\{f_1(x_1)f_2(x_2) \mid f_1 \in L^1(X_1,\mu_1), f_2 \in L^1(X_2,\mu_2)\}$ dicht in $L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ liegt.

Übung 114. Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x^2+y^2+z^2)^2 \leq \frac{64}{x^2+y^2} \right\}.$$

Übung 115. Berechnen Sie das Integral

$$\underset{B}{\int \cdots \int} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}\, d\lambda_p(x_1,\ldots,x_p)$$

für $\alpha_i \in (-1,\infty)$ über den Bereich $B = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq 0, x_1 + \ldots + x_p \leq 1\}$.

Übung 116. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 x_2 \cdots x_n)\,dx_1 \cdots dx_n.$$

Übung 117. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})\,dx_1 \cdots dx_n.$$

Was folgern Sie daraus für die Funktionenfolge $f_n : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x_1,x_2,\ldots) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ für $n \to \infty$?

Übung 118. Berechnen Sie das Volumen der p-dimensionalen Kugel mit Radius R.

Übung 119. Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$!

Übung 120. Für $i = 1, 2$ seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein σ-endliche Maßräume und $f_i : X_i \to (\mathbb{R}^+)$ positive meßbare Funktionen. Zeigen Sie:

1. $\nu_i = \int f_i \, d\mu_i$ ist eine σ-endliche Mengenfunktion.
2. $(\nu_1 \otimes \nu_2)(A) = \int_A f_1(x) f_2(y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y)$.

Übung 121. Für $n \geq 1$ sei $f(x, y) = 2^{2n}$ für $2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}$ und $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$. Sei $f(x, y) = -2^{2n+1}$ für $2^{-n-1} \leq x < 2^{-n}$, $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$, und sei $f = 0$ auf dem verbleibenden Teil von $[0, 1] \times [0, 1]$, der für ein n nicht in einem dieser Rechtecke enthalten ist. Zeigen Sie, daß

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) \, dx = 0, \text{ aber} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \, dy = 1.$$

Übung 122. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, und sei $F \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie, daß $(\mu_1 \times \mu_2)(F) = 0$ genau dann gilt, wenn $\mu_1(F_y) = 0$ μ_2-fast überall ist.

Übung 123. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

im Riemann'schen Sinne.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty e^{-tx} \, dt = \frac{1}{x}$ und den Satz von Fubini (Vorsicht!).

Übung 124. Zeigen Sie, daß die Funktion $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$ im Sinne von Lebesgue nicht integrierbar ist!

Übung 125. Sei $f : [1, \infty) \times [0, 1]$ durch $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ gegeben. Zeigen Sie, daß

$$\int_1^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx < 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_1^\infty f(x, y) \, dx \right) dy > 0.$$

Was folgern Sie daraus?

Übung 126. Sei $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ gegeben. Zeigen Sie, daß

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

gilt, aber daß die Funktion f dennoch nicht integrierbar ist.

Übung 127. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Für zwei Funktionen $f_1 : X_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 : X_2 \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $f_1 \otimes f_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ die Funktion $f_1 \otimes f_2 : (x_1, x_2) \to f_1(x_1) f_2(x_2)$. Zeigen Sie, daß

$$\int_{X_1 \times X_2} f_1 \otimes f_2 \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} f_1 \, d\mu_1 \cdot \int_{X_2} f_2 \, d\mu_2,$$

wenn f_1 und f_2 integrierbar sind.

Übung 128. Sei A eine positiv definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\, d\lambda^n(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}}.$$

Übung 129. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit dem durch $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definierten Produktmaß. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\alpha + x_1)(\alpha + x_2)\cdots(\alpha + x_n)$$

integrierbar?

Übung 130. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit den durch $\mu_s(\{0\}) = s$ und $\mu_s(\{1\}) = 1 - s$ definierten Produktmaßen für $0 < s < 1$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = 1 - s$$

im Maß μ_s gilt. Was folgt daraus für die Maße μ_s für verschiedene Werte von s?

Übung 131. Seien μ und ν zwei verschiedene Maße auf dem Meßraum $(X, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, daß die Produktmaße $\mu^{\mathbb{N}}$ und $\nu^{\mathbb{N}}$ auf dem unendlichen Produktraum $X^{\mathbb{N}}$ zueinander singulär sind.

Übung 132. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit dem durch $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definierten Produktmaß. Sei $T : X \to \mathbb{R}$ mit

$$T(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n.$$

Bestimmen Sie das Bildmaß $T(\mu)$.

Übung 133. Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit dem durch $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definierten Produktmaß. Sei $T : X \to \mathbb{R}$ mit

$$T(x_1, x_2, \ldots) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} x_n.$$

Zeigen Sie, daß das Bildmaß von μ unter T das Hausdorffmaß auf der Cantormenge ist.

Übung 134. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine absolut stetige Funktion; ferner existiere der Grenzwert $f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Zeigen Sie, daß dann

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = (f(\infty) - f(0)) \log \frac{b}{a}$$

gilt.
Hinweis: Schreiben Sie den Integranden als Integral und verwenden Sie den Satz von Fubini.

Übung 135. Verwenden Sie Übung 134, um das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \prod_{n=1}^\infty \left(1 - e^{-2^n x}\right) \frac{dx}{x}$$

zu berechnen.

Übung 136. Es sei $f : [a, b] \to [0, \infty[$ Borel-meßbar und

$$K := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$$

der durch Rotation der Ordinatenmenge von f um die $x-$Achse entstehende Rotationskörper. Dann ist K Borel-meßbar, und es gilt:

$$\lambda^3(K) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Übung 137. Prüfen Sie, welche der Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy, \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

für die folgenden Funktionen existieren und übereinstimmen:

1. $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ für $x, y > 0$.
2. $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} ((x^2 - y^2)^2/(x^2 + y^2)^2)$ für $x, y > 0$.

Übung 138. Die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei stetig, die uneigentlichen Riemann-Integrale

$$\int_0^\infty f(t) \log t \, dt, \int_0^\infty f(t) \, dt$$

seien (nicht notwendigerweise absolut) konvergent, und es gelte : $\int_0^\infty f(t) \, dt = 0$. Zeigen Sie, daß dann für alle $a, b > 0$ gilt:

$$\int_0^a \left(\int_b^\infty f(xy) \, dy \right) dx - \int_b^\infty \left(\int_0^a f(xy) \, dy \right) dx = \int_0^\infty f(t) \log t \, dt.$$

Übung 139. Berechnen Sie unter Benutzung geeigneter Koordinaten das Volumen

- des Teils der Kugel $(x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, der durch die Zylinderfläche $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ $(a^2 > b^2)$ herausgeschnitten wird.
- des Körpers, der von der Ebene $z = 0$ und den Flächen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ begrenzt wird.