7.3 Übungen zu Kapitel 3

7.3.1 Übungen zu Kapitel 3.1

Übung 36. Zeigen Sie das Lemma 3.2:
Sei $f : (X, \mathcal{A}_1) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ eine Abbildung und sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_2$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}_2$, so ist f genau dann $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-meßbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_1$.

Übung 37. Es seien $(X, \mathcal{A}_1)$ und $(Y, \mathcal{A}_2)$ Meßräume und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{A}_1$. Weiters seien Abbildungen $f_n : A_n \to Y$ gegeben. Die Abbildung $f : X \to Y$ sei durch $f(x) := f_n(x)$, falls $x \in A_n$ definiert. Zeigen Sie, daß die Abbildung f genau dann $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-meßbar ist, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f_n : (A_n, \mathcal{A}_1|_{A_n}) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ meßbar ist.

Übung 38. Seien $(X, \mathcal{A}_1, \mu)$, $(Y, \mathcal{A}_2, \nu)$ Maßräume mit den Vervollständigungen $(X, \overline{\mathcal{A}_1}, \overline{\mu})$ und $(Y, \overline{\mathcal{A}_2}, \overline{\nu})$. Weiters sei $f : (X, \mathcal{A}_1) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ meßbar und es gelte für jede ν-Nullmenge $C \in \mathcal{A}_2$ $\mu(f^{-1}(C)) = 0$. Zeigen Sie: Die Abbildung $f : (X, \overline{\mathcal{A}_1}) \to (Y, \overline{\mathcal{A}_2})$ ist meßbar. Ist insbesondere $\nu = f(\mu)$ so ist $f : (X, \overline{\mathcal{A}_1}) \to (Y, \overline{\mathcal{A}_2})$ meßbar und $\overline{\nu} = f(\overline{\mu})$.

Übung 39. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

1. Wenn f meßbar ist, dann ist auch $|f|$ meßbar.
2. Ist die Umkehrung richtig?

Übung 40. Zeigen Sie den Satz 3.6:
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, Y ein metrischer Raum auf $f : X \to Y$. Dann gilt: Sei $\mathcal{M}$ die Familie aller Mengen $E \subseteq Y$ mit $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

Übung 41. Sei $\xi_n : \mathbb{R} \to \{0, \ldots, 9\}$ gegeben durch die n-te Ziffer nach dem Komma von x in Dezimaldarstellung (im Falle von Mehrdeutigkeit wählen wir die Ziffernentwicklung, die auf $000\ldots$ endet). Zeigen Sie, daß ξ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-meßbar ist.

Übung 42. Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-meßbar.

Übung 43. Beweisen Sie: Das Bild-Maß eines σ-endlichen Maßes braucht nicht σ-endlich zu sein.

7.3.2 Übungen zu Kapitel 3.3

Übung 44. Sei f_n eine Folge meßbarer Funktionen und

$$E := \{x : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ existiert}\}.$$

Beweisen Sie, daß die Menge E meßbar ist.

Übung 45. Zeigen Sie, daß $\frac{df}{dx}$ Borel-meßbar ist, falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

7.3.3 Übungen zu Kapitel 3.4

Übung 46. Beweisen Sie den sechsten Punkt des Satzes 3.24:
$\int_E f(x)\,d\mu(x) = 0$ genau dann, wenn $\mu\{f > 0\} = 0$

Übung 47. Seien A und B zwei Teilmengen der Menge X und $\mathcal{A}$ die von A und B erzeugte σ-Algebra. Weiters sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ mit

$$\mu(A) = \frac{8}{25}, \quad \mu(B) = \frac{1}{4}, \quad \mu(A \cap B) = \frac{2}{25}.$$

Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in A \setminus B \\ -1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f meßbar ist, und bestimmen Sie $\int_X f\,d\mu$.

Übung 48. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, in dem jede Menge $A \in \mathcal{A}$ von positivem Maß eine Menge B mit endlichem positiven Maß enthält, so gilt:

$$\int_A f\,d\mu \geq \int_A g\,d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \quad \text{genau dann, wenn } f \geq g \ \mu - \text{fast überall.}$$

7.3.4 Übungen zu Kapitel 3.5

Übung 49. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Beweisen Sie:

1. f ist genau dann μ-integrierbar, wenn

   $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu\left(\left\{x \in X \mid 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\}\right)$$

   konvergiert.

2. Wenn $\mu(X) < \infty$ gilt, dann ist f genau dann integrierbar, wenn

   $$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > n\}\right)$$

   konvergiert.

Übung 50. Sei

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-t^2 x} \frac{\sinh 2tx}{\sinh x}\,dx.$$

1. Zeigen Sie für $t^2 \neq 1$, daß

$$I(t) = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1+t^2)^2 - 4t^2}.$$

2. Zeigen Sie weiters, daß $\lim_{t\to 1} \left\{ I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2} \right\} = \frac{3}{4}$.

Übung 51. Zeigen Sie das Lemma 3.29:
Seien $a_{ij} \geq 0$ und $i, j \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

Übung 52. Die Funktion f sei auf $(0, 1)$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ rational} \\ [1/x]^{-1} & \text{für } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

wobei $[x]$ das größte Ganze von x bezeichnet.
Zeigen Sie, daß $\int_0^1 f \, dx = \infty$.

Übung 53. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß im Lemma von Fatou im allgemeinen strikte Ungleichung gilt.

Übung 54. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \colon X \to [0, \infty]$ meßbar und

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = c \quad \text{wobei} \quad 0 < c < \infty.$$

Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^{\alpha} \right) d\mu(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ c & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 & \text{für } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Übung 55. Sei $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n,\infty)}(x)$. Zeigen Sie, daß f_n gleichmäßig und monoton gegen die Nullfunktion strebt, aber daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda.$$

Übung 56. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \, dx$.

Übung 57. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} \, dx$.

Übung 58. Berechnen Sie die Integrale in den Beispielen 56 und 57 ohne Verwendung der Maßtheorie!

Übung 59. Die Funktionen f_n und g_n seien durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{für } 0 \leq x \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} & \text{für } 0 \leq x \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

1. Zeigen Sie $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx \cdot \int_0^\infty g_n(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{4}$
2. Leiten Sie daraus $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ her.

Übung 60. Seien E_k für $k = 1, 2, \dots$ meßbare Mengen in $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $\sum_{k=1}^\infty \mu(E_k) < \infty$. Zeigen Sie, daß μ-fast alle x in höchstens endlich vielen E_k liegen.

Übung 61. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge meßbarer Funktionen. Beweisen Sie, daß die Folge f_n μ-fast überall gegen 0 konvergiert, wenn $\sum_n \mu(\{x \in X \mid |f_n(x)| > \varepsilon\})$ für alle $\varepsilon > 0$ konvergiert.

7.3.5 Übungen zu Kapitel 3.6

Übung 62. Zeigen Sie, daß $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$ liegt, wenn X lokal-kompakt ist.

Übung 63. Es sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer Funktionen auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gegeben. Ferner sei $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\,d\mu < \infty$ und $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. Zeigen Sie, daß

1. $f(x) \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$
2. $\int_X f(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n(x)\,d\mu$

gilt.

Übung 64. Sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}$. Beweisen Sie $0 < f_n(x) < x^{-\frac{1}{3}}$ für $x > 0$ und berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

a) unter Verwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz, b) direkt.

Übung 65. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, gegen f gleichmäßig konvergente Folge meßbarer Funktionen. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Bemerkung: In einem endlichen Maßraum gilt stets, daß eine beschränkte, meßbare Funktion integrierbar ist, denn $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu \le \mu(X) \sup |f| < \infty$.

Übung 66. Zeigen Sie, daß

1. $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1+x^2} \, dx = 0$ für $a > 0$, aber nicht für $a = 0$.

2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^p x^r \log x}{1+n^2 x^2}$ für $r > 0$ und $0 < p < \min(2, 1+r)$.

Übung 67. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(X) < \infty$. Sei $f \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ eine Funktion mit $\|f\|_\infty > 0$ und sei $\alpha_n := \int_X |f(x)|^n \, d\mu(x)$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty.$$

Übung 68. Seien f und g beliebige meßbare Funktionen.

1. Zeigen Sie, daß $\operatorname{ess\,sup}(f+g) \le \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$ gilt.
   Geben Sie auch ein Beipiel für die strikte Ungleichung an.

2. Sei $f = g$ f.ü. und f eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß $\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g = \sup f$.

Übung 69. Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ mit $\left|\int_X f \, d\mu\right| = \int_X |f| \, d\mu$. Zeigen Sie, daß ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha f = |f|$ μ-fast überall existiert.

Übung 70. Zeigen Sie für eine Funktion $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ folgende Stetigkeitsaussage:

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \quad \text{gibt es ein } \delta > 0, \quad \text{sodaß} \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon, \qquad \text{falls } \mu(E) < \delta.$$

Übung 71. Zeigen Sie die Bemerkung auf Seite 68: Sei $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann ist ϕ stetig auf (a, b).

Übung 72. Gegeben sei ein endlicher Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Funktion $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$. Ferner sei $S \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen.
Zeigen Sie folgende Aussage über den Integralmittelwert

$$\text{falls } A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in S \quad \text{für alle } E \quad \text{mit } \mu(E) > 0,$$

dann gilt $f(x) \in S$ für fast alle x.

Übung 73. Zeigen Sie die Bemerkung auf Seite 75:
Der Raum $C_c(\mathbb{C}, X)$ liegt nicht dicht im $L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mu)$.

Übung 74. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Weiters bezeichne $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |z - u| < r\}$. Das *essentielle Bild* von f wird durch

$$\operatorname{ess\,Im}(f) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0 : \mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0\right\}$$

definiert. Zeigen Sie:

1. Seien f und g zwei verschiedene Repräsentanten eines Elements von $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gilt $\operatorname{ess\,Im}(f) = \operatorname{ess\,Im}(g)$.

2. $\operatorname{ess\,Im}(f) \subseteq \overline{B(0, \|f\|_\infty)}$

3. $\operatorname{ess\,Im}(f)$ ist kompakt.

4. $\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Im}(f)) = 0$

Übung 75. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Zeigen Sie, daß dann

1. $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ für $0 < r < s \leq \infty$

2. $L^r(\mu) \supseteq L^s(\mu)$

gilt.

7.3.6 Übungen zu Kapitel 3.7

Übung 76. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. Zeigen Sie, daß dann $\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) \, dt$ gilt, wobei das rechte Integral ein uneigentliches Riemann-Integral ist.

Übung 77. Sei $X = [0, 1]$ und $\mu = \mathcal{H}|_{\mathcal{C}}$, das auf die Cantor-Menge eingeschränkte Hausdorff-Maß der Dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$. Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral

$$\int\limits_{\mathcal{C}} x^\alpha \, d\mu(x)$$

endlich. Berechnen Sie das Integral für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = -\frac{1}{2}$ numerisch auf 5 Stellen.

Übung 78. Welche der folgenden Funktionen f, g, h sind uneigentlich Riemann-integrierbar bzw. Lebesgue-integrierbar über I?

1. $f(x) = x/\sqrt{1 + x^4}$, $I = \mathbb{R}$

2. $g(x) = \sin x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}),\ I =]0, \infty[$

3. $h(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2},\ I =]0, 1[$

Übung 79. Für $s > 0$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x^{\frac{1}{s}}} = 2\Gamma(s+1)L(s),$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet und $L(s) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n/(2n+1)^s$.

Übung 80. Die Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien durch

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt \quad \text{und } G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\, dt$$

gegeben. Zeigen Sie:

1. F und G sind stetig auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie $F(0)$ und $G(0)$.

2. $F(0) - F(x) + G(x) = C|x|$ mit $C = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$

3. G ist zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt $G'' = F$

4. Bestimmen Sie C.

Übung 81. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Verknüpfung von zwei Riemann-integrierbaren Funktionen nicht Riemann-integrierbar sein muß.

Übung 82. Geben Sie ein Beispiel einer offenen Menge, die nicht Jordan-meßbar ist.

Übung 83. Sei $1 < p < \infty$ und $f \in L^p([0,\infty], \lambda)$. Zeigen Sie für die Funktion $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$ die Ungleichung von Hardy:

$$\|F(x)\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

7.3.7 Übungen zu Kapitel 3.8

Übung 84. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_{n,k} : X \to \mathbb{C}$ eine Folge meßbarer Funktionen. Zeigen Sie: Falls $f_{n,k} \to f_n$ für $k \to \infty$ im Maße und $f_n \to f$ im Maße konvergieren, dann gibt es eine Folge k_n, sodaß f_{n,k_n} für $n \to \infty$ im Maße gegen f konvergiert.

Übung 85. Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$. Vergleichen Sie die verschiedenen Konvergenzbegriffe.

Übung 86. Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ ein Maßraum mit dem Zählmaß ζ. Vergleichen Sie wiederum die verschiedenen Konvergenzbegriffe.

Übung 87. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Beweisen Sie, daß durch

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \, d\mu(x)$$

eine vollständige Metrik auf dem Raum der reellen meßbaren Funktionen (modulo Gleichheit μ-fast überall) gegeben ist. Zeigen Sie weiters, daß $d(f_n, f) \to 0$ genau dann gilt, wenn $f_n \to f$ im Maß μ.

Übung 88. Kontruieren Sie eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$, sodaß $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 0$ aber die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in keinem Punkt $x \in [0,1]$ konvergiert.

Übung 89. Stellen Sie in den folgenden Beispielen fest, in welchem Sinne die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ konvergieren:

1. $f_n(x) = (\cos x)^n$
2. $f_n(x) = (\cos nx)^n$
3. $f_n(x) = \cos nx$
4. $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$

7.4 Übungen zu Kapitel 4

7.4.1 Übungen zu Kapitel 4.1

Übung 90. Seien μ und ν $\sigma-$endlich und sei μ nicht absolut stetig bezüglich ν und umgekehrt. Gilt dann, daß $\mu \perp \nu$?

Übung 91. Beweisen Sie das Lemma 4.12!

1. Wenn λ auf A konzentriert ist, dann auch $|\lambda|$.
2. Wenn $\lambda_1 \perp \lambda_2$, dann $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.
3. Wenn $\lambda_1 \perp \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu$, dann $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.
4. Wenn $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \ll \mu$, dann $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.
5. Wenn $\lambda \ll \mu$, dann $|\lambda| \ll \mu$.
6. Wenn $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu$, dann $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
7. Wenn $\lambda \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu$, dann $\lambda = 0$.