Def) Theory T is contradictory [or inconsistent] in L (language), iff there exists $F \in L$ s.t. $T \vdash_L F$ and $T \vdash_L \neg F$.

T noncontradictory [or consistent] in L iff there is no $F \in L$ s.t. $T \vdash_L F$ and $T \vdash_L \neg F$.

Gödel: Every consistent theory has a model [completeness thm].

Def) Theory $T \subseteq L$ is complete (in L), iff for every $F \in L$ $T \vdash_L F$ or $T \vdash_L \neg F$.

Def) Theory $T \subseteq L$ is said to have Henkin witnesses iff for every $F \in L$ with exactly one free var v there exists a constant $c \in L$ s.t. $T \vdash_L (\exists v\, F \to F\,[\tfrac{c}{v}])$

c eingesetzt für v (wenn v frei vorkommt)

Prop.: Every theory $T \subseteq L$ that is consistent, complete and has Henkin witnesses has a model.

Lemma: If $F \to G$ is a tautology, v a variable then $\vdash_L \forall v F \to \forall v G$.

Recall rules
1) modus ponens: from $A \to B$ and A derive B
2) generalization: from F derive $\forall v\; F$
(*) tautologies are axioms [tautology of prop. logic with formulas $F_i \in L$ substituted for A_i]
3) axiom schemes: axioms are all formulas of the kind:
   A) $\exists v\; F \leftrightarrow \neg \exists v \neg F$
   B) $\forall v (F \to G) \to (F \to \forall v G)$ if v doesn't occur free in F
   C) $\forall v F \to F[\tfrac{t}{v}]$ if v doesn't occur free in F in the scope of a quantifier that binds a var. in t.

Derivation of $\forall v F \to \forall v G$ (if $F \to G$ tautology)
1) $\forall v F \to F$ (axiom of type C $F[\tfrac{v}{v}] = F$)
2) $F \to G$ tautology
3) $(\forall v\; F \to F) \to [(F \to G) \to (\forall v\; F \to G)]$ tautology of the term $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
4) $\forall v F \to G$ (modus ponens twice)
5) $\forall v (\forall v F \to G)$ generalization rule
6) $\forall v (\forall v F \to G) \to (\forall v F \to \forall v G)$
7) $\forall v F \to \forall v G$ modus ponens

Lemma: if v doesn't occur free in F in the scope of a quantifier that binds a variable in the term t then $\vdash F[\frac{t}{v}] \to \exists v\, F$

formal derivation:

1) $\forall v\ \neg F \to \neg F[\frac{t}{v}]$ axiom
2) $(\forall v\ \neg F \to \neg F[\frac{t}{v}]) \to (F[\frac{t}{v}] \to \neg \forall v\ \neg F)$
   tautology of the form $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
3) $F[\frac{t}{v}] \to \neg \forall v\ \neg F$ modus ponens
4) $\exists v\ F \leftrightarrow \neg \forall v\ \neg F$
5) $(F[\frac{t}{v}] \to \neg \forall v\ \neg F) \to ((\exists v\, F \leftrightarrow \neg \forall v\ \neg F) \to (F[\frac{t}{v}] \to \exists v\ F))$
   tautology of the form $A \to B\ ((C \leftrightarrow B) \to (A \to C))$
6) $F[\frac{t}{v}] \to \exists v\ F$ modus ponens twice

Prf: that every consistent complete theory T with Henkin witnesses has a model:
Given L, T define $\mathcal{M}$: underlying set M of $\mathcal{M}$ is the set of all closed terms of L.
[$M \neq \emptyset$ because there exists at least one formula with exactly one free var: $x \equiv x$ therefore Henkin witness c exists $\vdash \exists x\ x \equiv x \to c = c$
const. c
therefore a constant exists]

To the n-ary function symbol $f \in L$ assign the function $\bar{f}: M^n \to M$ $\bar{f}(t_1, \dots, t_n) = f\, t_1 t_2 \dots t_n$

[Thus we assign to every constant c the constant $c \in M = \{$ closed terms of $L\}$

To every n-ary relation symbol $R \in L$. assign the n-ary relation $\bar{R} \subseteq M^n$ def. by $(t_1, \dots, t_n) \in \bar{R}$ iff $T \vdash_L R\, t_1 \dots t_n$.

Note that for every closed atomic formula $F \in L$

$$\mathcal{M} \models F \quad \text{iff} \quad T \vdash_L F$$

Show that for all closed formulas $\in L$:
$\mathcal{M} \models F$ iff $T \vdash_L F$

Induction on number of symbols from $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \cup \{\forall, \exists\}$

no such symbols: atomic closed formulas ✓
if F is $\neg G$
by I.H. $\mathcal{M} \models G$ iff $T \vdash_L G$ $\quad$ $\overline{T \text{ complete!}}$
$\mathcal{M} \models \neg G \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models G \Leftrightarrow T \not\vdash_L G \Leftrightarrow T \vdash \neg G$
if F is $G \vee H$

Suppose $\mathcal{M} \models G \vee H$ then $\mathcal{M} \models G$ or $\mathcal{M} \models H$,
say $\mathcal{M} \models G$. By I. H. $\mathcal{M} \models G \iff T \vdash_L G$.
$T \vdash_L G \to (G \vee H)$ (tautology) with modus ponens:
from $T \vdash G$, $T \vdash G \to (G \vee H)$ derive $T \vdash_L G \vee H$
Suppose $T \vdash G \vee H$. T complete $\Rightarrow$ $T \vdash G$ or
$T \vdash \neg G$

if $T \vdash_L G$ then by I. H. $\mathcal{M} \models G$; by def of $\models$
$\mathcal{M} \models G \vee H$.

if $T \vdash_L \neg G$:
$T \vdash \neg G \to ((G \vee H) \to H)$ tautology
modus ponens twice

$T \vdash H$

By I. H. $\mathcal{M} \models H$ by def $\models$: $\mathcal{M} \models G \vee H$

EX F of the form $G \wedge H$, $G \to H$, $G \leftrightarrow H$.

if F is $\forall v\, G$

Suppose $T \vdash \forall v\, G$
for all closed term t : $\forall v\, G \to G[\frac{t}{v}]$ axiom modus
ponens : for all closed terms t: $T \vdash G[\frac{t}{v}]$
I. H. : $\forall$ closed term $t \in M$ $\mathcal{M} \models G[\frac{t}{v}]$
$\forall$ closed term $t \in M$ $\mathcal{M}; v \mapsto t \models G$
by def of $\models$: $\mathcal{M} \models \forall v\, G$

Suppose $T \nvdash_L \forall v\, G$
$\neg\neg G \to G$ tautology by Lemma $T \vdash \forall v \neg\neg G \to \forall v\, G$
because of modus ponens : $T \nvdash_L \forall v \neg\neg G$
axiom: $\exists v \neg G \leftrightarrow \neg \forall v \neg\neg G$
completeness of T: $T \vdash_L \neg \forall v \neg\neg G$
tautology + modus ponens : $T \vdash_L \exists v \neg G$

Henkin witness: $T \vdash_L \forall v \neg G \to \neg G[\frac{c}{v}]$ mod pon:
$T \vdash_L \neg G[\frac{c}{v}]$

T consistent $\Rightarrow$ $T \nvdash G[\frac{c}{v}]$
I. H. $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models G[\frac{c}{v}]$
i.e. $\mathcal{M}; v \mapsto \underset{\in M}{c} \not\models G$
therefore $\mathcal{M} \not\models \forall v\, G$

Wenn F der Form $\exists v\, G$

Ang. $\mathcal{M} \models \exists v\, G$ also $\exists t \in M$ $\mathcal{M}; v \mapsto t \models G$.

$\mathcal{M} \models G[\frac{t}{v}]$ I.V. $T \vdash_L G[\frac{t}{v}]$ $T \vdash G[\frac{t}{v}] \to \exists v\, G$
als Lemma gezeigt

m.p. $T \vdash \exists v\, G$

Umgekehrt: ang. $T \vdash \exists v\, G$ wg. Henkin zeugen

$T \vdash \exists v\, G \to G[\frac{c}{v}]$ für eine Konstante $c \in L$.

$T \vdash G[\frac{c}{v}]$ I.V. $\mathcal{M} \models G[\frac{c}{v}]$ daher $\mathcal{M} \models \exists v\, G$

$\square$

Bem) T Theorie, F Formel $T \vdash F \iff \exists\, T'$ endl. $\subseteq T$ s.d. $T' \vdash F$

$T \vdash F$ genau dann wenn formale Ableitung $F_1 \dots F_n$ mit $F_n = F$ existiert, nur endl. viele Formeln $\in T$ kommen vor.

Kor.: T in L konsistent genau dann wenn jede endl. Teilm. $T' \subseteq T$ konsistent.

Bem) $T \overset{\subseteq L}{}$ inkonsistent $\iff \forall F \in L$ $T \vdash_L F$
$\Rightarrow$ T inkons. $\exists F$ $T \vdash_L F$, $T \vdash_L \neg F$
$A \to (B \to (A \wedge B))$ Tautologie, also $T \vdash_L F \wedge \neg F$
$(\neg F \wedge F) \to A$ A bel. Tautologie m.p. $T \vdash_L A$ bel.

Bem) $L_n = L_{S_n}$ S_n Menge der nichtlog. Symbolen
Wenn $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \dots$ und T_k Theorie $\subseteq L_k$
und $T_k \subseteq T_{k+1}$ $k \geq 0$.

Wenn $\forall k$ T_k kons. in L_k ($\nexists F \in L_k$ s.d. $T_k \vdash_{L_k} F$, $T_k \vdash_{L_k} \neg F$)
dann $T = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$ in L_S, $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$

konsistent.
Wenn $\exists F \in L$ s.d. $T \vdash_L (F \wedge \neg F)$ dann $\exists k$ s.d. alle in der formalen Ableitung vorkommenden Formeln in L_k und alle verwendeten nichtlog. Axiome in T_k sind.

Lemma: T Theorie in L, c Konstante $\notin L$. $F \in L$ Formel mit höchstens einer freien Var, nämlich v.
Wenn $T \vdash_{L \cup \{c\}} F[\frac{c}{v}]$, dann $T \vdash_L \forall v\, F$
($L = L_S$ $L \cup \{c\}$ soll heißen $L_{S \cup \{c\}}$)

In einer formalen Ableitung von $F[\frac{c}{v}]$ über $L \cup \{c\}$ jedes Vorkommen von c durch w, eine Var, die in der Ableitung nicht vorkommt, ersetzen, bekommt wieder formale Ableitung, diesmal von $F[\frac{w}{v}]$, Generalisierungsaxiom $\forall v\, F$.

Kor: F geschl. Formel $\in L$.
Wenn $T \vdash_{L(c)} F$, dann $T \vdash_L F$.
Lemma auf geschl. F anwenden $F[\frac{c}{v}] = F$ aus $T \vdash_{L(c)} F$ folgt $T \vdash_L \forall v F$ axiom $\forall v F \to F$ weil $F = F[\frac{v}{v}]$ mit m.p. $T \vdash_L F$.

Kor: T Theorie $\subseteq L$ T in L konsistent, dann auch in L
$L_{S \cup C}$ C Menge von zusätzl. Konstanten.

Für 1 Konst: Lemma auf $F = G \land \neg G$ anwenden, $G \subseteq L$, für endl viele konst.

In jeder Ableitung nur endl. viele Konst. iterieren.

Deduktionstheorem: Wenn $T \cup \{F\} \vdash G$ dann $T \vdash_L F \to G$, wobei F geschl. Formel $\in L$ T Theorie in L, G Formel $\in L$.

Kor.: $T \vdash_L F \iff T \cup \{\neg F\}$ inkons.

Bew.: „$\Rightarrow$" klar.

„$\Leftarrow$" $T \cup \neg F \vdash G \land \neg G$
$T \vdash \neg F \to (G \land \neg G)$
$(\neg F \to (G \land \neg G)) \to F$ Tautologie
m.p. $T \vdash F$

Satz: T kons. Theorie in L, dann $\exists L' \supseteq L$ und Theorie T' in L' mit $T \subseteq T'$ sodass T' kons., vollst. in L' und T' hat Henkin Zeugen.

Beweis für L Sprache mit höchstens abzählbar vielen Symbolen. (Dann ist auch L' nur abzählbar).

$L = L_S$ dann sei $L' = L_{S'}$ $S' = S \cup C$ $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ Menge von abzählbar unendl. vielen Konstantensymb. $\notin S$.

L' abzählbar, alle Formeln von L' in einer Liste geordnet $F_0, F_1, F_2, \dots$

$L_n = L_{S_n}$
S_n = Symbolmenge

Turm von Sprachen und Theorien konstruieren: $T_0 = T$ $L_0 = L$ konstr. $L_{n+1} \supseteq L_n$, $T_{n+1} \supseteq T_n$ (*) induktiv konstruieren sodass **B)** in T_n entweder F_{n-1} oder $\neg F_{n-1}$ ist **C)** und für jede Formel F_{n-1} der Form $F_{n-1} = \exists v\, H$ s.d. in H genau 1 freie Var. v enthält T_n ein $H[\frac{c}{v}]$ für eine Konstante $c \in C$.

(*) **A)** s.d. $\forall n$ T_n konsistent in L_n

geg. T_n kons. in L_n (obige Bedingungen erfüllt).
A, B, C für L_0, T_0 erfüllt Induktion von T_n, L_n auf T_{n+1}, L_{n+1}.

Wenn $T_n \cup \neg F_n$ in $\tilde{L} = L_{S_n} \cup D$ — D die in F_n vorkomm. Konst. $\in C$. — konsistent, dann
$L_{n+1} := L_{S_n \cup D}$ und $T_{n+1} = T \cup \{\neg F_n\}$

Wenn $T_n \cup \{\neg F_n\}$ in $\tilde{L} = L_{S_n \cup D}$ nicht konsistent ist, dann $T_n \vdash_{\tilde{L}} F$. insb. $T_n \cup F$ konsistent.

In diesem Fall: wenn F nicht der Form $\exists v H$ (H hat genau 1 freie Var v), dann $L_{n+1} = \tilde{L} = L_{S_n} \cup D$ D die Konst. aus C in F_n und $T_{n+1} = T_n \cup \{F\}$ $(= T_n)$
wenn F_n der Form $\exists v H$ (genau die Var v frei in H!

Wähle $c \in C \setminus (S_n \cup D)$ (Konstante die noch nicht vorgekommen ist) und setzen $L_{n+1} = L_{S_n \cup D \cup \{c\}}$ und
$T_{n+1} = T_n \cup \{F_n, H[\frac{c}{v}]\}$ $(= T_n \cup \{H[\frac{c}{v}]\})$
Setze $T' = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, $L' = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ T_n kons. in L_n überprüfen:

Fall, wo $\neg F_n$ dazu kommt ist klar
wenn F_n nicht der Form $\exists v H$ klar ✓

Fall $T_n \cup \{\neg F_n\}$ inkons. in $L_{S_n} \cup D = \tilde{L}$ und F_n der Form $\exists v H$
Ang. $T_n \cup \{F_n, H[\frac{c}{v}]\}$ inkons. in $L_{n+1} = L_{S_n} \cup D \cup \{c\}$
Nach Deduktionstheorem $T_n \vdash_{\tilde{L}} F_n$ $T_n \vdash_{L_{n+1}} F_n$
Nach Ded.-Thm. $T_n \vdash_{L_{n+1}} \neg H[\frac{c}{v}]$ $= \exists v H$

Nach Lemma $T_n \vdash_{\tilde{L}} \forall v \neg H$

$T_n \vdash_{\tilde{L}} \forall v \neg H$ und $T_n \vdash_{\tilde{L}} \exists v H$

Aus $\forall v \neg H$ und $\exists v H$ über $\tilde{L}$ einen Widerspruch formal herleiten; dann ist T_n inkons. in $\tilde{L} \supseteq L_n$, nach Lemma T_n auch schon inkons. über L_n (weil $\tilde{L}$ aus L_n durch hinzufügen von Konst. hervorgeht)
Da $\forall k$ T_n konsis. in L_n, ist T'. Vollständigkeit klar, da die Liste der F_n alle Formeln in L' ist und $\forall k$ entweder F_n oder $\neg F_n$ in $T_{n+1} \subseteq T'$

Henkin: wenn $F_n = \exists v H$ (genau v frei in H) wenn $\neg F_n \in T$ dann $T \vdash F_n \rightarrow B$ B bel. insb. $T \vdash F_n \rightarrow H[\frac{c}{v}]$ c beliebig $\in C$.
$(\neg F \rightarrow F \rightarrow B$ Tautologie)

Wenn $F_n \in T$ dann $F_n \in T_{n+1}$ und im Schritt von k auf k+1 haben wir auch $H[\frac{c}{v}]$ hinzugefügt. $H[\frac{c}{v}] \in T$
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$ Tautologie $T \vdash \exists v H \rightarrow H[\frac{c}{v}]$