Beispiele aus Algebra von Hungerford:

6. Sei $f/g \in K(x)$ mit $f/g \notin K$ und $f$ und $g$ relativ prim in $K[x]$. Man betrachte $K(x) : K$:
   (a) Man zeige: $x$ ist algebraisch über $K(f/g)$ und $[K(x) : K(f/g)] = \max(\deg(f), \deg(g))$.
   (b) Falls $E \neq K$ ein Zwischenkörper ist, ist $[K(x) : E]$ endlich.
   (c) $x \mapsto f/g$ induziert einen Homomorphismus $\sigma : K(x) \to K(x)$ mit $\frac{\phi(x)}{\psi(x)} \mapsto \frac{\phi(f/g)}{\psi(f/g)}$. $\sigma$ ist genau dann ein $K$-Automorphismus von $K(x)$, wenn $\max(\deg(f), \deg(g)) = 1$.
   (d) $\mathrm{Aut}_K K(x)$ besteht aus allen Automorphismen, die durch $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in K$ und $ad - bc \neq 0$ induziert werden.
7. Sei $G \subseteq \mathrm{Aut}_K K(x)$ mit $G = \{x \mapsto x, x \mapsto \frac{1_K}{1_K - x}, x \mapsto \frac{x - 1_K}{x}\}$. Man zeige, dass $G$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}_K K(x)$ ist und bestimme $G'$.
8. Sei $\chi(K) = 0$ und $G = \langle x \mapsto x + 1 \rangle \leq \mathrm{Aut}_K K(x)$. Man zeige, dass $G$ unendlich und zyklisch ist und bestimme $E = G'$ und $[K(x) : E]$.
9. (a) Sei $K$ ein unendlicher Körper. Dann ist $K(x)$ galois über $K$.
   (b) Sei $K$ ein endlicher Körper. Dann ist $K(x)$ nicht galois über $K$.
10. Sei $K$ unendlich. Dann sind die einzigen abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Aut}_K K(x)$ die ganze Gruppe und alle endlichen Untergruppen.
11. In der Erweiterung $\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Q}(x^2)$ abgeschlossen, aber $\mathbb{Q}(x^3)$ nicht.
12. Sei $F : E : K$ eine Körpererweiterung und seien $E$ über $K$ und $F$ über $E$ galois. Weiters lassen sich alle $\sigma \in \mathrm{Aut}_K E$ auf $F$ fortsetzen. Dann ist $F$ über $K$ galois.
13. In der Erweiterung $K(x, y)$ eines unendlichen Körpers ist der Zwischenkörper $K(x)$ galois über $K$, aber nicht stabil im Bezug auf die Körpererweiterung $K(x, y) : K$.