1. Sei G eine Gruppe und $N \leq G$. Dann gilt: $\forall \phi \in \mathrm{Inn}(G) : \phi(N) = N \iff \forall \phi \in \mathrm{Inn}(G) : \phi(N) \subseteq N$.
2. Sei G eine Gruppe und $N \leq G$. Dann gilt: $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G) : \phi(N) = N \iff \forall \phi \in \mathrm{Aut}(G) : \phi(N) \subseteq N$.
3. Man finde eine Gruppe G, einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ und ein $\phi \in \mathrm{Aut}\, G$, sodass $\phi(N) \subset N$.
4. Sei G eine Gruppe, $H, K \leq G$. Dann gilt: $(H, K) = \langle \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\} \rangle \trianglelefteq H \cup K = \langle H \cup K \rangle$.
5. Sei G eine Gruppe, $H \leq G$. Dann gilt: $(G', H) = \{e\} \Longrightarrow (G, H') = \{e\}$.
6. Sei G eine Gruppe, $H, K \leq G$, $K \trianglelefteq H$. Dann ist $H/K \subseteq Z(G/K) \iff (G, H) \subseteq K$.
7. Welche der Untergruppen $G^{(n)}$, Z_n und γ_n sind charakteristisch bzw. totalinvariant?
8. Man zeige, dass S_3 und S_4 auflösbar, aber nicht nilpotent sind.
9. Man zeige, dass S_n für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist. Man verwende dafür, dass A_n für $n \geq 5$ einfach ist.
10. Man zeige: $A_n = S_n'$. Man verwende dazu, dass A_n von den 3-Zyklen erzeugt wird.
11. Sei G eine Gruppe. Man zeige, dass G genau dann nilpotent ist, wenn $\exists n : \gamma_n = \{e\}$.
12. Sei G eine nilpotente Gruppe, $H \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Dann sind auch H und G/N nilpotent.
13. Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und G/N und N. sind nilpotent. Ist dann auch G nilpotent? Wenn nein gebe man ein Gegenbeispiel an.

14. Seien p, q verschiedene Primzahlen. Geben Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}]$ an und bestimmen Sie die Galois-Gruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}] : \mathbb{Q}$.

15. Für Unterkörper A und B eines Körpers F sei AB der von $A \cup B$ erzeugte Unterkörper von F (d.h. $AB = A(B) = B(A)$).

    (a) Wenn A, B Zwischenkörper von $F : K$ sind, dann ist $[AB : K]$ genau dann endlich, wenn $[A : K]$ und $[B : K]$ beide endlich sind.

    (b) Wenn $[A : K]$, $[B : K]$ endlich sind, dann gilt
    $$[AB : K] \leq [A : K][B : K].$$

    (c) Wenn $[A : K]$, $[B : K]$ endlich und relativ prim sind, dann gilt $[AB : K] = [A : K][B : K]$.

16. Seien A, B Zwischenkörper von $F : K$ mit $[F : K]$ endlich.

    (a) $[AB : K] = [A : K][B : K] \Longrightarrow A \cap B = K$.

    (b) Wenn $[A : K] = 2$ oder $[B : K] = 2$ ist, dann gilt die Umkehrung der Implikation.

    (c) Geben Sie ein Beispiel (z.B. mit $[A : K] = 3$, $[B : K] = 3$) an, in dem die Umkehrung nicht gilt.

17. Seien $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahlen. Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n}]$ und die Galois-Gruppe.

18. Seien A, B Zwischenkörper einer endlichdimensionalen Galois Erweiterung $F : K$.

    (a) Dann ist $(A \cap B)' = \operatorname{Aut}_{A \cap B} F$ die von $\operatorname{Aut}_A F$ und $\operatorname{Aut}_B F$ erzeugte Untergruppe von $\operatorname{Aut} F$.

    (b) Was kann man schließen, wenn $\operatorname{Aut}_{AB} F$ trivial ist?

19. Seien A, B Zwischenkörper von $F : K$, sodass $A : K$ endlichdimensional Galois ist. Dann ist $AB : B$ endlichdimensional Galois und $\operatorname{Aut}_B AB$ ist isomorph zu $\operatorname{Aut}_{A \cap B} A$.

20. Eine algeraische Köpererweiterung $F : K$ ist genau dann normal, wenn jedes f irreduzibel in $K[x]$, das in F eine Nullstelle hat, in $F[x]$ in irreduzible Faktoren, die alle denselben Grad haben, faktorisiert.

21. Man zeige: A_n ist für $n > 4$ einfach.
22. Man bestimme $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ und verwende das, um ein Gegenbeispiel für Beispiel (7) zu finden.
23. Sei $\overline{\mathbb{Z}_p}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Z}_p$. Man zeige, die unendliche Erweiterung $\overline{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p$ ist nicht zyklisch und bestimme ihre Galoisgruppe.