41. Sei V ein $\mathbb{F}_q$-Vektorraum, U, W Teilräume mit $U \subseteq W$. Dann gilt

$$\mu(U, W) = \mu(\{0\}, W/U).$$

(Isomorphe Verbände haben dieselbe Möbius-Funktion; $\mu(a, b)$ im Verband $(X, \leq)$ hängt nur vom Intervall $[a, b] = \{c \in X \mid a \leq c \leq b\}$ ab.)

42. Sei V ein n-dim $\mathbb{F}_q$-Vektorraum. Finden Sie mit Möbius-Inversion eine Formel für die Anzahl der bijektiven $\mathbb{F}_q$-linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to V$, die keinen Fixpunkt außer 0 haben.

43. Zwischen halbgeordneten Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ sei eine Galois-Korrespondenz gegeben, d.h. für $x \in X$, $x \mapsto x' \in Y$, für $y \in Y$, $y \mapsto y' \in X$ mit

(i) $a \leq a''$,

(ii) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$.

Zeigen Sie

(iii) $a' = a'''$.

(iv) Die Elemente a in X bzw. Y mit $a = a''$ sind genau jene, für die ein b in der jeweils anderen Menge mit $a = b'$ existiert.

(v) Die Einschränkung von $a \mapsto a'$ auf jene a in X bzw. Y mit $a = a''$ ist eine Bijektion.

44. Wenn K, F endliche Körper mit $K \subseteq F$, $|K| = q$, dann ist $\mathrm{Aut}_K(F)$ zyklisch, erzeugt von $\psi : x \mapsto x^q$.

45. Wenn K, F endliche Körper mit $K \subseteq F$, dann ist $F : K$ Galois.

46. Sei $F : K$ eine endl.-dim. Körpererweiterung. Dann sind die Galois-abgeschlossenen Zwischenkörper genau jene E mit $\mathrm{Aut}_K(F)' \subseteq E$.

47. Sei F ein Körper, G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(F)$ und K der Fixkörper von G, d.h.

$$K = \{a \in F \mid \forall \sigma \in G : \sigma(a) = a\}.$$

Dann ist $F : K$ Galois.