

41. Sei V ein \mathbb{F}_q -Vektorraum, U, W Teilräume mit $U \subseteq W$. Dann gilt

$$\mu(U, W) = \mu(\{0\}, W/U).$$

(Isomorphe Verbände haben dieselbe Möbius-Funktion; $\mu(a, b)$ im Verband (X, \leq) hängt nur vom Intervall $[a, b] = \{c \in X \mid a \leq c \leq b\}$ ab.)

42. Sei V ein n -dim \mathbb{F}_q -Vektorraum. Finden Sie mit Möbius-Inversion eine Formel für die Anzahl der bijektiven \mathbb{F}_q -linearen Abbildungen $\varphi: V \rightarrow V$, die keinen Fixpunkt außer 0 haben.

43. Zwischen halbgeordneten Mengen (X, \leq) und (Y, \leq) sei eine Galois-Korrespondenz gegeben, d.h. für $x \in X$, $x \mapsto x' \in Y$, für $y \in Y$, $y \mapsto y' \in X$ mit

(i) $a \leq a''$,

(ii) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$.

Zeigen Sie

(iii) $a' = a'''$.

(iv) Die Elemente a in X bzw. Y mit $a = a''$ sind genau jene, für die ein b in der jeweils anderen Menge mit $a = b'$ existiert.

(v) Die Einschränkung von $a \mapsto a'$ auf jene a in X bzw. Y mit $a = a''$ ist eine Bijektion.

44. Wenn K, F endliche Körper mit $K \subseteq F$, $|K| = q$, dann ist $\text{Aut}_K(F)$ zyklisch, erzeugt von $\psi: x \mapsto x^q$.

45. Wenn K, F endliche Körper mit $K \subseteq F$, dann ist $F: K$ Galois.

46. Sei $F: K$ eine endl.-dim. Körpererweiterung. Dann sind die Galois-abgeschlossenen Zwischenkörper genau jene E mit $\text{Aut}_K(F)' \subseteq E$.

47. Sei F ein Körper, G eine endliche Untergruppe von $\text{Aut}(F)$ und K der Fixkörper von G , d.h.

$$K = \{a \in F \mid \forall \sigma \in G: \sigma(a) = a\}.$$

Dann ist $F: K$ Galois.