35. Berechnen Sie die Möbius-Funktion für den Verband der Unterkörper des Körpers mit q Elementen.

36. Sein W ein r-dim Teilraum eines n-dim $\mathbb{F}_q$-Vektorraums V. Finden Sie eine Formel für die Anzahl der k-dim Teilräume von V, die mit W trivialen Durchschnitt haben.

37. Im Spezialfall $n = k + r$ des vorigen Beispiels kann man die Lösung auf elementare Art (ohne Möbius-Inversion) finden.

38. Sei U ein Teilraum eines n-dim $\mathbb{F}_q$-Vektorraums V, und W ein m-dimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum. Finden Sie eine Formel für die Anzahl der linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ mit $\ker(\varphi) = U$ (via Möbius-Inversion angewendet auf die Anzahl der φ mit $\ker(\varphi) \supseteq U$). Für die Anzahl der injektiven linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ erhält man: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} q^{m(n-k)}$.

39. Finden Sie auf elementare Weise (ohne Möbius-Inversion) eine einfachere Formel für die Anzahl der injektiven linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ (V ein n-dim $\mathbb{F}_q$-Vektorraum, W ein m-dimensionaler $\mathbb{F}_q$-Vektorraum). Mit der Formel für die injektiven linearen Abbildungen aus dem vorigen Beispiel gleichgesetzt, erhält man eine Gleichung, aus der folgende Polynomgleichung folgt:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(x - q^k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^{n-k}$$

40. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.