13. Seien $K \subseteq E \subseteq F$ Körper, und $F : E$ und $E : K$ jeweils eine algebraische Körpererweiterung. Dann ist auch $F : K$ algebraisch.

14. Seien $K \subseteq E$ Körper und $f \in E[x]$ irreduzibel. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes irreduzibles Polynom $g \in K[x]$, sodaß für jedes $h \in K[x]$ gilt: h ist in $E[x]$ durch f teilbar genau dann, wenn h in $K[x]$ durch g teilbar ist.

15. w heißt n-te Einheitswurzel, wenn $w^n = 1$, und primitive n-te Einheitswurzel, wenn zusätzlich $w^k \neq 1$ für $0 < k < n$. Wieviele n-te Einheitswurzeln, wieviele primitive n-te Einheitswurzeln gibt es in $\mathbb{F}_q$?

16. Wir nennen ein Element $a \in \mathbb{F}_q$ ein Quadrat, wenn es ein $c \in \mathbb{F}_q$ gibt mit $c^2 = a$, und andernfalls ein Nichtquadrat.

(i) Die Quadrate ungleich 0 bilden eine Untergruppe von $(\mathbb{F}_q \setminus \{0\}, \cdot)$. Was ist der Index dieser Untergruppe? (Fallunterscheidung $\chi(\mathbb{F}_q) = 2$ oder $\chi(\mathbb{F}_q) = p$, ungerade.)

(ii) Kann es vorkommen, daß die Quadrate in $\mathbb{F}_q$ eine Untergruppe (bzw. eine echte Untergruppe) von $(\mathbb{F}_q, +)$ bilden?

17. Zeigen Sie, daß in jedem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ jedes $a \in \mathbb{F}_q$ als Summe zweier Quadrate $a = b^2 + c^2$ mit $b, c \in \mathbb{F}_q$ darstellbar ist. Hinweis: voriges Beispiel; entweder sowieso nur Quadrate, ansonsten genügt es, ein einziges Nichtquadrat als Summe zweier Quadrate darzustellen (Nichtquadrate Nebenklasse). Ginge das nicht, wären die als Summe zweier Quadrate darstellbaren Elemente allesamt Quadrate, die Menge der Quadrate daher unter Addition abgeschlossen.