Eine endliche projektive Ebene (V, G, I) besteht aus einer endlichen Menge V (deren Elemente Punkte genannt werden) zusammen mit einer Menge G (deren Elemente Geraden genannt werden), und einer Relation $I \subseteq V \times G$ sodaß

(i) je zwei Geraden $g \neq h$ sich in genau einem Punkt schneiden (d.h. genau ein $p \in V$ existiert mit $(p, g) \in I$, $(p, h) \in I$).

(ii) je zwei Punkte $p \neq q$ auf genau einer gemeinsamen Gerade liegen (d.h. genau ein $g \in G$ existiert mit $(p, g) \in I$, $(q, g) \in I$).

(iii) und ein nichttriviales Viereck existiert (vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen).

Für $p \in V$ bezeichnen wir mit (p) die Menge aller Geraden g mit $(p, g) \in I$ und für $g \in G$ mit (g) die Menge aller Punkte p mit $(p, g) \in I$.

60. Sei (V, G) eine endliche projektive Ebene. Dann existiert ein n (die Ordnung der projektiven Ebene) sodaß für alle $p \in V$ und alle $g \in G$ gilt:

(a) $\forall p \in V \ |(p)| = n + 1, \quad \forall g \in G \ |(g)| = n + 1,$

(b) $|V| = |G| = n^2 + n + 1.$

Hinweis: für (a) $|(p)| = |g|$ für $(p, g) \notin I$ zeigen, (iii) verwenden; für (b) für ein fixes $q \in V$ auf zwei Arten die Menge der Paare (p, g) mit $(p, g), (q, g) \in I$ abzählen.

61. Sei W ein 3-dim $\mathbb{F}_q$-Vektorraum und V die Menge der 1-dim Teilräume, G die Menge der 2-dim Teilräume und I die Relation $p \subseteq g$. Dann bildet (V, G, I) eine endliche projektive Ebene der Ordnung q.

Eine endliche affine Ebene (V, G, I) besteht aus einer endlichen Menge V (deren Elemente Punkte genannt werden) zusammen mit einer Menge G (deren Elemente Geraden genannt werden), und einer Relation $I \subseteq V \times G$ sodaß (mit der Notation $g \| h$ für $(g) \cap (h) = \emptyset$)

(i) Zu jeder Gerade g und jedem Punkt p nicht auf dieser Gerade gibt es genau eine zu g parallele Gerade durch p (für $p \in V$ und $g \in G$ mit $(p, g) \notin I$ existiert genau ein $h \in G$ mit $(p, h) \in I$ und $g \| h$),

(ii) je zwei Punkte $p \neq q$ liegen auf genau einer gemeinsamen Geraden (d.h. genau ein $g \in G$ existiert mit $(p, g) \in I$, $(q, g) \in I$).

(iii) und es gibt ein nichttriviales Dreieck (drei Punkte, nicht alle auf einer Geraden).

62. Sei (V, G, I) eine endliche affine Ebene. Zeigen Sie, daß $g \| h$ (definiert als $(g) \cap (h) = \emptyset$) eine Äquivalenzrelation auf G ist, und daß es ein n (genannt die Ordnung der affinen Ebene) gibt mit

(a) $\forall p \in V \ |(p)| = n + 1, \quad \forall g \in G \, |(g)| = n,$

(b) $|V| = n^2, \quad |G| = n^2 + n.$

63. Zeigen Sie, dass man aus jeder projektiven Ebene der Ordnung n durch Entfernen einer Geraden eine affine Ebene der Ordnung n bekommt und umgekehrt aus jeder affinen Ebene der Ordnung n durch Hinzufügen einer Geraden eine projektive Ebene der Ordnung n.

64. Für $a \in \mathbb{F}_q^*$ sei T_a die Matrix indiziert mit den Elementen von $\mathbb{F}_q$ mit $ax + y$ an der Stelle (x, y). Zeigen Sie, daß aT, $a \in F^*$, eine affine Ebene der Ordnung q darstellt, wenn man Zeilen, Spalten und Orte konstanter Eintragung in einer der Matrizen T_a als Geraden, und die Elemente (x, y) als Punkte betrachtet.