FFC 19.05.08

Lem: $K \subseteq F$ Körperew $J, H \leq Aut_K F$. $H \subseteq J$. We $[J:H]$ endl, dam $[H':J'] \leq [J:H]$

Bew: $\sigma_1 \dots \sigma_k$ RepSys der Li-Nk von H in J gewählt sd:

Ang $[H':J'] > k$ dann seien $u_1 \dots u_{k+1} \in H'$ J'-lu.

Betrachten lin. Gleichgssyst: $\sigma_1(u_1)x_1 + \sigma_1(u_2)x_2 + \dots + \sigma_1(u_{k+1})x_{k+1} = 0$

$\sigma_k(u_1)x_1 + \sigma_k(u_2)x_2 + \dots + \sigma_k(u_{k+1})x_{k+1} = 0$

mehr Var als Gleichgen $\Rightarrow \exists$ nicht triv Lsg $(a_1 \dots a_{k+1}) \in F^{k+1}$

Sei $(a_1 \dots a_{k+1}) \in F^{k+1} \setminus \{0\}$ Lsg mit minimal viele $a_i \neq 0$, $a_1 \dots a_r \neq 0$ $a_{r+1} \dots a_{k+1} = 0$

Bew: $\sigma \in J$ gilt: $(a_1 \dots a_{k+1})$ Lsg, dann auch $(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_{k+1}))$, ~~ist~~ Klarerweise

$(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_{k+1}))$ Lsg von $\sigma\sigma_1(u_1)x_1 + \dots + \sigma\sigma_1(u_{k+1})x_{k+1} = 0$

$\sigma\sigma_k(u_1)x_1 + \dots + \sigma\sigma_k(u_{k+1})x_{k+1} = 0$

Dieses Glsys ist aber dasselbe mit vertauschten Gleichgen, da erstens $\sigma_i(u_j)$ nur von der Li-Nk von H in J abhängt. ($\pi \in H \Rightarrow \pi(u_j) = u_j$, $\sigma_i\pi(u_j) = \sigma_i(u_j)$)

und $\{\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2 \dots \sigma\sigma_k\}$ ~~ist~~ wieder ein Rep sys der Li-Nk von H in J ist.

$(a_1 \dots a_{k+1})$ Löse $\neq 0$ mit min vielen $a_r \neq 0$ durch Mult mit $a_1^{-1} \in F$ erhält man Lsg $(1, a_2, \dots a_{k+1})$ wobei eines der $a_i \notin J'$.

Zeile d. Glsys mit $\sigma_i H = H$: $u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_{k+1} a_{k+1} = 0$. Die u_i waren J'-lu also ein $a_i \notin J'$. Die $a_i \notin \{0,1\}$ (0,1 werden von allen $\sigma \in Aut F$ fix gelassen)

oBdA $a_2 \notin J'$ Sei $\sigma \in J$ mit $\sigma(a_2) \neq a_2$ dann $(1, a_2, \dots a_{k+1}) - (\sigma(1), \sigma(a_2) \dots \sigma(a_{k+1}))$

$= (0, \underbrace{a_2 - \sigma(a_2)}_{\neq 0}, b_3, \dots b_r, 0 \dots 0)$ Lsg $\neq 0$ mit weniger als r Koord $\neq 0$ $\lightning$.

Lem. $F:K$ Körperew A, B Zwischkör $F:K$ oder Ugr von $Aut_K F$ mit $B \subseteq A$

Dann: Wenn B Galois-abg, dann auch A und $[A:B] = [B':A']$

Bew: Sei $[A:B]$ endl dann $[B':A']$ endl $\leq [A:B]$ und weiters $[A'':B''] \leq [A':B']$

Wenn also $B'' = B$, dann $[A:B] \leq [A'':B''] = [A:B''] \leq [B':A'] \leq [A:B]$
$A'' \supseteq A$

Daher $[A'':B] = [A:B]$ endl., wegen $A'' \supseteq A$ folgt $A'' = A$ außerdem $[A:B] = [B':A']$

Haben gezeigt: $F:K$ Körpererw., endl-dim. Dann $|Aut_K F| = [F:K]$ endl
und alle Ugr von $Aut_K F$ Galois abg. Wir haben Bijektion zw Galois-abg
Zwischenkörper. (Ü dass sind genau die Körper L mit $K'' \subseteq L$) geg durch $A \mapsto A'$
mit $[A:B] = [B':A']$ für alle A, B Ugr ~~und~~ von $Aut_K F$ oder
abg. Zwischenkörper. Im Falle $F:K$ endl. dim Galois d.h
$(Aut_K F)' = K$ [bzw $K'' = K$] Bijektion zw. allen Zwischenkörper und
alle Ugr geg durch $A \mapsto A'$ und es gilt $[A:B] = [B':A']$

2. Teil des Hauptsatzes d. Galois-Theorie:
$F:K$ ~~endl~~ endl dim Galois-Erw., E Zwischenkörper. Dann äquivalent
1) $E:K$ Galois
2) E stabil unter $Aut_K F$ (d.h. $\forall \sigma \in Aut_K F \; \sigma(E) = E$)
3) E' Normalteiler in $Aut_K F$

Wenn die äquivalenten Bed auf E zutreffen, dann $Aut_K E = {Aut_K F}/{E'}$

Bem: $Aut_K F$ heißt Galois-Gruppe der Körpererw $F:K$ auch geschrieben als $Gal(F:K)$. In dieser Notation $Gal(E:K) = {Gal(F:K)}/{E'}$
$E' = \{\sigma \in Gal(F:K) \mid \sigma(e) = e \; \forall e \in E\}$ sofern E stabil unter $Gal(F:K)$ bzw. äquiv $E' \trianglelefteq Gal(F:K)$.

Bem: $E \subseteq F$, G Gruppe $\leq Aut F$
E heißt stabil unter G wenn $\forall \sigma \in G \; \sigma(E) = E$
Da G Gruppe, folgt E stabil unter G schon aus $\forall \sigma \in G \; \sigma(E) \subseteq E$
(surj von $\sigma|_E : E \to E$ folgt aus $\sigma^{-1}(E) \subseteq E$ und Bij. von $\sigma: F \to F$).

Lem: $F:K$ Körpererw
1) $H \leq Aut_K F$, dann gilt $H \trianglelefteq Aut_K F \Rightarrow H'$ stabil unter $Aut_K F$
2) L Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq F$, dann L stabil unter $Aut_K F \Rightarrow L' \trianglelefteq Aut_K F$.

Bew 2) L stabil, sei $\pi \in L'$ $\sigma \in Aut_K F$
z.z. $\sigma^{-1} \pi \sigma \in L'$. Für $l \in L$ gilt $\sigma^{-1} \pi \underbrace{\sigma(l)}_{\in L} = \sigma^{-1} \sigma(l) = l$ weil $\sigma(l) \in L$
(wg. Stabilität von L) und daher $\sigma(l)$ fix unter $\pi \in L'$. Gezeigt $\sigma^{-1} \pi \sigma \in L'$
für $\pi \in L'$ $\sigma \in Aut_K F$ also L' Normalteiler ✓

Ad 1) $H \trianglelefteq \mathrm{Aut}_K F$ ang. H' nicht stabil, sei $\sigma \in \mathrm{Aut}_K F$, $v \in H'$ mit $\sigma(v) \notin H'$ dann
Wählen $\pi \in H$ mit $\pi(\sigma(v)) \neq \sigma(v)$ $\quad \sigma^{-1}\pi\sigma(v) \neq v$ da aus $\pi(\sigma(v)) \neq \sigma(v)$ und Bijektiv.
von σ^{-1} folgt $\sigma^{-1}\pi\sigma(v) \neq \sigma^{-1}(\sigma(v)) = v$

Bem: $F:K$ endl-dim Galois-Erw, dann $F:E$ Galois für jeden Zwischenkö ($E''=E$ äquivalent dazu), bzw für bel Körper an $F:K$ ist $F:E$ Galois äquivalent zu E Galois abg. zeige Äquivalenz für $E:K$ Galois

Lem: E Zwischenkö von $F:K$. Wenn $F:K$ Galois und E stabil unter $\mathrm{Aut}_K F$ dann $E:K$ Galois.

Bew: $K''=K \Rightarrow \forall e \in E \setminus K \ \exists \sigma \in \mathrm{Aut}_K F$ mit $\sigma(e) \neq e$, wg Stabilität v. E unter $\mathrm{Aut}_K F$ kann man σ einschränken auf $\sigma|_E \in \mathrm{Aut}_K E$ also $\exists\, \sigma \in \mathrm{Aut}_K E$ mit $\sigma(e) \neq e$.

Lem: E Zwischenkö von $F:K$ $F:K$ Galois. Wenn $E:K$ alg. und Galois dann E stabil unter $\mathrm{Aut}_K F$.

Bew: Sei $e \in E$ zz $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}_K F$ gilt $\sigma(e) \in E$.
Sei $f \in K[x]$ Minimalpoly von e über K [E alg über K] $\deg f = n$,
Seien $e = e_1, e_2, \dots, e_r$ alle Nst von f in E Betrachte g
$g = (x-e_1)\cdots(x-e_r) \in E[x]$. Jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_K F$ permutiert die Nst von f in F, da $\sigma(E)=E$, permutiert σ auch die Nst von f in E.
σ permutiert $e_1 \dots e_r \Rightarrow \forall$ Koeff a_n von g gilt $\sigma(a_n) = a_n$ (Koeff sind ~~elementweise~~ Elementarsymm Fkt in den Nullst $e_1 \dots e_r$) Koeff von g in $(\mathrm{Aut}_K F)' = K$. $g \in K[x]$ mit $\deg g \leq \deg f$ und $g(e) = 0 \Rightarrow f \mid g$ und daher $f = g$ (beide normiert). Alle Nullst von f in F sind schon in E, insb ist für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_K F$ $\sigma(e) \in E$ (σ perm die Nst von f).

~~[illegible] F:K Galois, E Zwischenkö mit~~
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~