FFC 5.5.08

Möbius-Fkt eines endl. Körpers

Sei $(P,\le)$ endl. halbgeord. Menge, $\zeta: P\times P \to \mathbb{Z}$

Funktion $\zeta(x,y)=\begin{cases}1 & x\le y\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$, bezeichnen auch die Matrix indiziert mit El von P mit Eintragungen $\zeta(x,y)$ als ζ.

Prop: ζ invertierbar in $M_{|P|}(\mathbb{Z})$ und die Inverse μ hat die Eig: $\mu(x,y)\neq 0$ nur für solche x,y mit $x\le y$

Bem: nennt die $\mathbb{Z}$-Algebra $A(P)$ der Matrizen $M_{|P|}(\mathbb{Z})$ mit der Eig. Eintragungen $\neq 0$ nur an Stellen (x,y) mit $x\le y$ in P die ~~Inzidenzmatrix~~ Inzidenzalgebra von P.

Prop: heißt also: Inzidenzmatrix ζ von P ist in der Inzidenzalgebra von P invertierb.

Bew: $\mu\zeta = I$ und $\mu\in A(P)$ äquivalent zu $\sum_{x\le z\le y}\mu(x,z) = \begin{cases}1 & x=y\\0&\text{sonst}\end{cases}$ und $\mu\in A(P)$

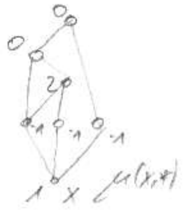
Das kann man erreichen, indem man (f. fixes x) $\mu(x,y)$ induktiv definiert wie folgt:

$\mu(x,y)=0$ wenn $x\not\le y$

$\mu(x,x)=1$, $\mu(x,y) = -\sum_{x\le z<y}\mu(x,z)$. Induktiv nach Höhe über x vorgehen:

wenn $z\ge x$, Höhe von z über x ist minimale Länge einer maximalen Kette

$x=x_0<x_1<\dots<x_n=z$



Inverse $\mu\in A(P)$ von ζ existiert, und erfüllt auch $\zeta\mu=I$. (befinden uns im Ring $M_n(\mathbb{Z})$)

d.h. es gilt auch $\sum_{x\le z\le y}\mu(z,y)=\begin{cases}1&x=y\\0&\text{sonst}\end{cases}$

Prop: Möbius-Inversion $(P,\le)$ endl, halbgeord. Menge

f,g,h Funktionen: $P\to(G,+)$ Gruppe sodass $g(x)=\sum_{a\in P,\, a\le x} f(a)$

$h(x)=\sum_{b\in P,\, b\ge x} f(b)$ dann $f(x)=\sum_{a\le x}\mu(a,x)g(a)$,

$$f(x)=\sum_{b\ge x}\mu(x,b)h(b)$$

Bew: $\sum_{a\le x}\mu(a,x)g(a) = \sum_{a\le x}\sum_{b\le a}\mu(a,x)f(b) = \sum_b \Big(\overbrace{\sum_{b\le a\le x}\mu(a,x)}^{\delta_{xb}}\Big) f(b) = f(x)$

bzw. $g(x)=\sum_{a\le x} f(a)$ äquiv zu

$f\cdot\zeta = g$ $\quad (f(a_1)\,f(a_2)\dots f(a_n))\cdot\zeta = (g(a_1)\dots g(a_n))$

also wegen $\zeta\mu=I$ folgt $f=g\mu$

Analog f. h.

Bsp: $(P,\le)$ Sei $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ Potenzmenge einer endl. Menge

Beh: $\mu(A,B)=\begin{cases}(-1)^{|B\setminus A|} & \cancel{B\subseteq A}\ A\subseteq B\\ 0 & A\not\subseteq B\end{cases}$ genügt zu überprüfen

1) $\mu(A,B)=0$ für $A\not\subseteq B$ ✓

2) für fixes A,B mit $A\subseteq B$ $\sum_{A\subseteq C\subseteq B}\mu(A,C)=\begin{cases}1 & A=B\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$$\sum_{A\subseteq C\subseteq B}\mu(A,C)=\sum_{D\subseteq B\setminus A}\mu(A,A\cup D)=\sum_{D\subseteq B\setminus A}(-1)^{|D|}=\sum_{k=0}^{|D|}\binom{|D|}{k}(-1)^k=\begin{cases}0 & D\neq\emptyset\\ 1 & D=\emptyset\end{cases}$$

Summe $=0$ für $A\subsetneq B$, Summe $=1$ $A=B$.

Bem: $\mu(A,B)=\begin{cases}0 & A\not\subseteq B\\ \mu(\emptyset,B\setminus A) & A\subseteq B\end{cases}$

Möbius-Inversion im Verband $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ ist Inklusion-Exklusion:

Sei $A_1,\dots,A_n\subseteq X$ endl; $I=\{1..n\}$. Für eine Teilmenge der Indexmenge I $J\subseteq I$

sei $f(J)=|\{x\in X\mid x\in A_i\Leftrightarrow i\in J\}|=|\{x\in X\mid \{i\in I\mid x\in A_i\}=J\}|$

$g(J)=|\{x\in X\mid i\in J\Rightarrow x\in A_i\}|=|\bigcap_{i\in J}A_i|$

$g(J)=|\bigcap_{i\in J}A_i|=\sum_{L\supseteq J}f(L)\quad\Rightarrow\quad f(J)=\sum_{L\supseteq J}\mu(J,L)g(L)=\sum(-1)^{|L\setminus J|}|\bigcap_{i\in L}A_i|=\sum_{C\subseteq I\setminus J}(-1)^{|C|}|\bigcap_{i\in J\cup C}A_i|$

für $J=\emptyset$

$f(J)=|X\setminus\bigcup_{i\in I}A_i|=\sum_{k=0}^{|I|}(-1)^k\sum_{\{i_1..i_k\}\neq}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|$

Zahlentheor. Möbius Fkt:

Verband der Teiler von n mit $a\le b:\Leftrightarrow a|b$ $\mu(a,b)=\begin{cases}0 & a\nmid b\\ 0 & b=ac\quad c \text{ nicht quadratfrei}\\ (-1)^s & b=a\cdot c\quad c=p_1\cdots p_s\quad p_1..p_s \text{ versch.}\end{cases}$

Zeigt man durch überprüfen von $\mu(a,b)=0$ f. $a\nmid b$ und $\sum_{a|d|b}\mu(a,d)=\begin{cases}0 & a\neq b\\ 1 & a=b\end{cases}$

$\mu(a,b)$ für $a|b$ hängt nur von $\frac{b}{a}$ ab, eigentliche Zahlenth. Möbius Fkt in einer Var ist $\mu(a)=\mu(1,a)$ bzw umgekehrt: $\mu(a,b)=\begin{cases}\mu(\frac{b}{a})\\ 0 & a\nmid b\end{cases}$

Bsp: Verband der $\mathbb{F}_q$-Unterräume eines n-dim $\mathbb{F}_q$-VR V, bzgl $\subseteq$:

$$\mu(U,W) = \begin{cases} 0 & U \not\subseteq W \\ (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \ (k = \dim W/U = \dim W - \dim U) & U \subseteq W \end{cases} = \begin{cases} 0 & U \not\subseteq V \\ \mu(0, W/U) & U \subseteq V \end{cases}$$

Satz von Weiser für Möbius-Fkt eines endl. Verbandes

(Verband: halbgeord Menge $(V,\leq)$ s.d. $\forall a,b \in V\ \exists \sup(a,b) = a \vee b,\ \exists \inf(a,b) = a \wedge b$)

Nennen, Minimum des Verbands: 0 und das Maximum 1

Dann gilt für bel $a \in V$ mit $a \neq 0$: $\sum_{x:\ x \vee a = 1} \mu(0,x) = 0$

Bew: $S = \sum_x \sum_{y \geq x,\ y \geq a} \mu(0,x)\mu(y,1) = \sum_x \mu(0,x) \underbrace{\sum_{y:\ 1 \geq y \geq x \vee a} \mu(y,1)}_{1 \text{ für } x \vee a = 1,\ 0 \text{ sonst}} = \sum_{x:\ x \vee a = 1} \mu(0,x)$

andererseits $S = \sum_{y \geq a} \mu(y,1) \underbrace{\sum_{0 \leq x \leq y} \mu(0,x)}_{\text{Summe} = 0} = 0$ $(y \geq a > 0)$.

Bew der Formel für Möbius-Fkt des Verbands der $\mathbb{F}_q$-Unterräume von V

(n-dim $\mathbb{F}_q$-VR) genügt z.z. $\mu(0,V) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$ Ind üb n $n=0$ ✓

Sei $n > 0$ P bel 1-dim Teilraum von V: Weiser $\sum_{U:\ P \vee U = V} \mu(0,U) = 0$ bzw:

$$\mu(0,V) = -\sum_{U:\ P \vee U = V} (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}}$$ (nach I.V. $\mu(0,U) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}$ für $\dim U = k < n$)

Anzahl der U mit $\dim U = n-1$, $U \vee P = V$ ist:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q - \frac{(q^n - q)(q^n - q^2)\cdots(q^n - q^{n-2})}{(q^{n-1} - q)(q^{n-1} - q^2)\cdots(q^{n-1} - q^{n-2})} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{(q^n - 1)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{q^{n-1} - 1}{q^n - 1}\right)}^{\frac{q^n - 1 - q^{n-1} + 1}{q^n - 1}}$$

$$= \frac{q^n - q^{n-1}}{q - 1} = q^{n-1} \Rightarrow \mu(0,V) = (-1)^n q^{(n-1) + \binom{n-1}{2}} = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$$