68. Geben Sie einen Isomorphismus an zwischen $M_n(R[x])$, dem Ring der $n \times n$ Matrizen mir Eintragungen im Polynomring $R[x]$, und $M_n(R)[x]$, dem Polynomring in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in $M_n(R)$. (Hiebei ist R ein kommutativer Ring mit Eins.)

69. Seien f, g und h Polynome in $R[x]$ (R ein kommutativer Ring mit Eins), davon f ein normiertes Polynom (d.h. mit Leitkoeffizient 1) sodaß $f \cdot g = h$. Sei S ein Unterring von R. Zeigen Sie: wenn f und h in $S[x]$, dann auch $g \in S[x]$.

70. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $a, b, d \in R$, d kein Nullteiler. Wenn $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ wobei $a = da'$, $b = db'$, dann gilt $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$.

71. Sei R ein ZPE-Ring und $a, b, c \in R$. Wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $a \mid bc$, dann folgt $a \mid c$.

72. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, I ein Ideal von R und $I[x]$ das Ideal von $R[x]$ bestehend aus jenen Polynomen, deren Koeffizienten alle in I liegen.

(i) Geben Sie einen Isomorphismus an $\varphi\colon (R/I)[x] \to R[x]/I[x]$.

(ii) $\psi\colon R[x] \to (R/I)[x]$, gegeben durch $\psi(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + I)x^k$, ist ein Ringepimorphismus.

73. Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes Polynom. Wenn für eine Primzahl p das Polynom $\bar{f}$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ (das aus f hervorgeht, indem man die Koeffizienten modulo p nimmt), irreduzibel ist, dann ist f in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel. Geben Sie ein Beispiel, daß das für ein nicht normiertes Polynom nicht gelten muß.

74. Sei $f \in R[x]$, R ein Integritätsbereich, $c \in R$ und $m \in \mathbb{N}$. c ist Nullstelle von f vom Grad m genau dann, wenn c Nullstelle von f ist und Nullstelle vom Grad $m-1$ von f'.

75. Sei R ein Euklidischer Ring, dessen Rangfunktion $\rho(ab) \geq \rho(a)$ (für $a, b \in R$ mit $ab \neq 0$) erfüllt. Zeigen Sie: $u \in R$ ist Einheit genau dann, wenn u minimalen Rang hat (d.h. $\rho(u) = \min\{\rho(a) \mid a \in R \setminus \{0\}\}$).

76. Sei D ein Integritätsbereich und kein Körper, dann ist $D[x]$ kein Hauptidealring. (Betrachten Sie das Ideal jener Polynome, deren konstanter Term in I liegt, I ein nichttriviales Ideal von D.)

77. Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K und $f, g, h \in K[x]$ normierte Polynome mit $f \cdot g = h$. Wenn $h \in R[x]$, dann folgt $f \in R[x]$ und $g \in R[x]$.