52. Sei R ein Ring. Für $A, B \subseteq R$ sei $AB = \{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}$ und $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Sei $a \in R$, und A, B, $C \subseteq R$. Dann gilt

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A(BC) = (AB)C$

(iii) wenn $A \trianglelefteq R$ und $B \trianglelefteq R$, dann auch $A + B \trianglelefteq R$ und $AB \trianglelefteq R$

(iv) wenn $A \trianglelefteq R$ und R ein Einselement hat, dann gilt $RA = AR = A$

(v) B bzgl. $+$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ $aB = \{a{\cdot}b \mid b \in B\}$ und $Ba = \{b{\cdot}a \mid b \in B\}$.

53. Sei R ein Ring, und A, B, B_1, $\ldots$, B_n, C Teilmengen von R.
Wenn $0 \in B$ und $0 \in C$, dann $A(B{+}C) = AB{+}AC$ und $(B{+}C)A = BA{+}CA$.

Etwas allgemeiner gilt: wenn $0 \in B_i$ für $1 \leq i \leq n$, dann

$$A(B_1 + \ldots + B_n) = AB_1 + \ldots + AB_n \quad \text{und} \quad (B_1 + \ldots + B_n)A = B_1A + \ldots + B_nA.$$

54. Ein Ring R heißt *linkseinfach* [bzw. *rechtseinfach*], wenn er keine Linksideale [bzw. Rechtsideale] außer (0) und R hat. Sei R ein Ring, $a \in R$.

(i) Ra ist ein Linksideal; aR ein Rechtsideal.

(ii) Wenn R ein Einselement hat, dann ist Ra das von a erzeugte Linksideal und aR das von a erzeugte Rechtsideal.

(iii) Wenn R ein Einselement hat, dann ist R linkseinfach genau dann, wenn jedes $a \in R \setminus \{0\}$ linksinvertierbar ist [und analog für rechts].

(iv) Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring mit Eins. R ist Schiefkörper genau dann, wenn R linkseinfach ist.

55. Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring. R ist Schiefkörper genau dann, wenn R linkseinfach, rechtseinfach und nullteilerfrei ist.

56. Sei R ein Ring, $a, b \in R$. Dann gilt $(ab) \subseteq (a)(b)$.
Wenn R kommutativ ist, dann gilt $(ab) = (a)(b)$.

57. Für $1 \leq i \leq n$ sei R_i ein Ring mit Eins. Dann ist jedes Ideal von $R_1 \times \ldots \times R_n$ der Form $I_1 \times \ldots \times I_n = \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_j \in I_j\}$, wobei I_j ein Ideal von R_j ist.

58. (i) Sei I ein Ideal von R, dann ist $R/I \neq (0)$ und nullteilerfrei genau dann, wenn $I \neq R$ und für alle $a, b \in R$ gilt: $ab \in I \Longrightarrow a \in I \vee a \in I$.

(ii) Sei R kommutativer Ring mit Eins, P Ideal von R, dann gilt

$$P \text{ Primideal} \Longleftrightarrow R/P \text{ Integritätsbereich}$$

59. Wenn S Unterring von R, dann ist $\chi(S)$ ein Teiler von $\chi(R)$. (Dabei gilt jede ganze Zahl als Teiler von 0.)

60. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $a \in R$, dann gilt

$$a \text{ ist Einheit} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für jedes maximale Ideal } M \text{ von } R \text{ gilt } a \notin M$$

61. Jeder endliche nullteilerfreie Ring $R \neq \{0\}$ ist Schiefkörper; insbesondere ist jeder endliche Integritätsbereich ein Körper.

(Bemerkung: Tatsächlich ist jeder endliche nullteilerfreie Ring $R \neq \{0\}$ ein Körper, da nach dem Satz von Wedderburn jeder endliche Schiefkörper ein Körper ist.)

62. Sei K ein Körper, dann hat $M_n(K)$, der Ring der $n \times n$ Matrizen über K, keine Ideale außer $\{0\}$ und $M_n(K)$.

(Hinweis: Multiplikation von $A \in M_n(K)$ (nicht die Null-Matrix) mit E_{ij} von links und E_{kl} von rechts, wobei E_{ij} die Matrix mit der Eintragung 1 an der Stelle (i,j) und 0 sonst bezeichnet).

63. Sei S eine Menge, $\mathcal{P}(S)$ die Menge aller Teilmengen von S. Für $A, B \in \mathcal{P}(S)$ sei

$$A + B := A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad \text{und} \quad A \cdot B := A \cap B$$

definiert. Mit dieser Addition und Multiplikation ist $\mathcal{P}(S)$ ein „Boole'scher Ring", d. h. ein kommutativer Ring mit Eins, in dem $a^2 = a$ für jedes Element a gilt.

64. Der Ring in Beispiel 63 ist isomorph zu $\prod_{x \in S} \mathbb{Z}_2$ (direktes Produkt je einer Kopie von $\mathbb{Z}_2$ für jedes Element von S).

65. Sei $(G,+)$ eine kommutative Gruppe, und $\mathrm{End(G)} = \{\varphi : G \to G \mid \varphi(g+h) = \varphi(g) + \varphi(h)\}$ die Menge der Endomorphismen von G. Dann ist $(\mathrm{End(G)}, +, \circ)$ mit der Addition $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ und der Multiplikation $(\varphi \circ \psi)(g) = \varphi(\psi(g))$ ein Ring mit Eins.

66. Zeigen Sie mit kombinatorischen Argumenten (d.h., mit Hilfe der Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge):

(1)
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(2)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

67. Sei R ein Ring, $\chi(R) = n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von n. S sei die Menge $\mathbb{Z}_m \times R$ mit der Addition $(\bar{k}, r) + (\bar{l}, s) = (\overline{k+l}, r+s)$ und der Multiplikation $(\bar{k}, r) \cdot (\bar{l}, s) = (\overline{k \cdot l}, ks + lr + r \cdot s)$, dann gilt:

S ist Ring mit Eins, $\chi(S) = m$, und wenn R kommutativ ist, dann auch S.