42. Jede Gruppe der Ordnung 56 hat einen nichttrivialen Normalteiler.

43. Jede Gruppe der Ordnung 200 hat einen nichttrivialen Normalteiler.

44. Sei H eine endliche p-Gruppe. Dann ist $\mathrm{Z}(H) \neq \{e\}$. (Allgemeiner: Wenn eine endliche p-Gruppe H Untergruppe einer endlichen Gruppe G ist, dann ist $H \cap \mathrm{Z}(G) \neq \{e\}$.)

45. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a,\ b,\ c \in R$. Zeigen Sie
- (i) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$
- (ii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- (iii) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ und $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

46. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $a,\ b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $n,\ m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie
- (i) $(-a)^k = (-1)^k a^k$
- (ii) $(na) \cdot (mb) = (n \cdot m)(a \cdot b)$ (Hier ist $n \cdot m$ das Produkt in $\mathbb{Z}$.)
- (iii) Wenn R ein Einselement 1_R hat, dann ist $na = (n1_R) \cdot a = a \cdot (n1_R)$.

47. Sei R ein Ring; a heiße Links-Nullteiler, wenn $\exists b \in R$ mit $b \neq 0$ und $a \cdot b = 0$. Dann ist für $a \in R$ ist äquivalent:
- (1) a ist links kürzbar (d.h. $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$)
- (2) a ist kein Links-Nullteiler
- (3) $L_a\colon R \to R$, $L_a(x) = a \cdot x$ ist injektiv.

Außerdem ist (in einem Ring mit Eins) jede Linkseinheit links kürzbar.

48. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, $a,\ b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} \cdot b^k .$$

(Wenn R kein Einselement hat, definieren wir für $r,\ s \in R$ $r \cdot s^0 := r$ und $s^0 \cdot r := r$.)

49. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $\mathrm{Nil}(R) = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a^n = 0\}$ die Menge der nilpotenten Elemente von R. Wenn R kommutativ ist, dann ist $\mathrm{Nil}(R)$ ein Ideal von R.

50. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, $E(R)$ die Menge der invertierbaren Elemente (Einheiten) von R, und $a,\ b \in R$. Dann gilt
- (i) $a \in E(R),\ b \in \mathrm{Nil}(R) \implies a - b,\ a + b \in E(R)$
- (ii) $1_R - b \in \mathrm{Nil}(R) \implies b \in E(R)$.

51. Sei R ein kommutativer Ring.
- (i) Wenn $a \in R$ ein Nullteiler und $b \in R$ beliebig, dann ist ab ein Nullteiler. Die Nullteiler von R bilden jedoch im Allgemeinen kein Ideal (Beispiel).
- (ii) Die Menge der Nicht-Nullteiler von R ist multiplikativ abgeschlossen, d.h., wenn a kein Nullteiler und b kein Nullteiler, dann ist auch ab kein Nullteiler.