Algebra Übungen 4 WS02/03

31. Die Quaternionengruppe Q_8 ist auf der Menge $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ durch die Verknüpfungen: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, und Rechnen mit -1 wie man es sich vorstellt, d.h., $(-1)^2 = 1$, $(-1)x = -x = x(-1)$ und $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ für $x, y \in \{i, j, k\}$, definiert. Zeigen Sie: Jede echte Untergruppe ist zyklisch, Q_8 aber ist nicht zyklisch.

32. Sei Q_8 die Quaternionengruppe. Zeigen Sie
- (i) Jede Untergruppe der Q_8 ist Normalteiler.
- (ii) Q_8 ist nicht isomorph zur D_4

33. Finden Sie Gruppen H_1, H_2, K_1 und K_2 sodaß $H_1 \times H_2 \simeq K_1 \times K_2$, aber kein H_i zu einem K_i isomorph ist.

34. Seien G, H endliche zyklische Gruppen. $G \times H$ ist zyklisch genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(|G|, |H|) = 1$.

35. Sei I eine Menge und für $i \in I$ sei G_i eine Gruppe. Wenn P und Q Gruppen, und für $i \in I$ $p_i\colon P \to G_i$ und $q_i\colon Q \to G_i$ Gruppenhomomorphismen sind, sodaß $(P, \{p_i \mid i \in I\})$ und $(Q, \{q_i \mid i \in I\})$ beide die universelle Eigenschaft des direkten Produkts der G_i erfüllen, dann sind P und Q isomporph mittels eines Isomorphismus $\varphi\colon P \to Q$ mit $q_i \circ \varphi = p_i$ und $p_i \circ \varphi^{-1} = q_i$.

36. Sei $N \trianglelefteq G$. Es existiert genau dann eine Untergruppe $K \leq G$ mit $G = NK$ und $N \cap K = \{e\}$, wenn die kanonische Projektion $\pi\colon G \to G/N$ eine Rechtsinverse hat (d.h. wenn es einen Homomorphismus $f\colon G/N \to G$ mit $\pi \circ f = \mathrm{id}_{G/N}$ gibt); und wenn es so eine Untergruppe K gibt, dann ist sie isomorph zu G/N.

37. Sei G eine Gruppe; für $g \in G$ sei $\varphi_g\colon G \to G$ durch $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ definiert, und $\mathrm{Inn}(G) := \{\varphi_g \mid g \in G\}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G)$ ist Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$.

38. Finden Sie zwei nicht isomorphe endliche Gruppen G, H, sodaß für jedes $n \in \mathbb{N}$ G und H gleich viele Elemente der Ordnung n haben. (Hinweis: Ordnung 8 bzw. 16).

39. Eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt *charakteristische Untergruppe*, wenn für jeden Automorphismus φ von G gilt $\varphi(H) = H$. Eine Untergruppe H von G heißt *totalinvariant*, wenn für jeden Endomorphismus φ von G gilt $\varphi(H) \subseteq H$. Zeigen Sie:
- (i) Jede charakteristische Untergruppe ist Normalteiler.
- (ii) Jede totalinvariante Untergruppe ist charakteristisch.
- (iii) Das Zentrum $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G\ xg = gx\}$ einer Gruppe G ist eine charakteristische Untergruppe von G.

40. Bestimmen Sie das Zentrum der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (Hinweis: betrachten Sie spezielle, ganz, ganz einfache Matrizen, und die Bedingung, mit allen denen zu kommutieren.)

41. Finden Sie ein Beispiel einer Gruppe G, deren Zentrum keine totalinvariante Untergruppe ist.