20. Sei G Gruppe, und S, $T \leq G$. Dann gilt $|ST| = |S|\,[T\colon S \cap T]$.
Wenn S und T endlich sind, dann gilt

$$|ST| = \frac{|S|\,|T|}{|S \cap T|}\,.$$

21. Sei G Gruppe, H, $K \leq G$. $H \cup K$ ist Gruppe genau dann, wenn $H \subseteq K$ oder $K \subseteq H$.

22. Sei G Gruppe und H, $K \leq G$. HK ist eine Gruppe genau dann, wenn $HK = KH$.

23. Sei G Gruppe, H, $K \leq G$, $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$. Dann gilt $H \vee K = HK$ genau dann, wenn HK eine Gruppe ist.

24. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und a, $b \in G$ mit $|a|$, $|b|$ endlich.

(i) Wenn $\operatorname{ggT}(|a|, |b|) = 1$ und $ab = ba$, dann gilt $|ab| = |a||b|$.
(ii) Etwas allgemeiner: wenn $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ und $ab = ba$, dann folgt $|ab| = \operatorname{kgV}(|a|, |b|)$.

25. Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.
(i) Wenn für $a \in G$ seine Ordnung $|a|$ in G bekannt ist, was kann man über die Ordnung von $f(a)$ in H aussagen?
(ii) Wenn $K \leq G$ eine Untergruppe ist, deren Ordnung $|K|$ und Index $[G : K]$ bekannt sind, was kann man über $|f(K)|$ und $[H : f(K)]$ aussagen?

26. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $(C_n, \cdot)$ die zyklische Gruppe der Ordnung n. Bestimmen Sie
(i) alle Gruppenhomomorphismen $\varphi\colon C_n \to C_m$
(ii) alle Automorphismen von C_n

27. Zur Zyklendarstellung von Permutationen
(a) Seien π, $\tau \in S_n$, τ eine Transposition. Wie unterscheidet sich die Zyklendarstellung von $\tau\pi$ (oder $\pi\tau$) von der von π?
(b) Wie sieht man die Ordnung einer Permutation aus ihrer Zyklendarstellung?

28. Sei $\pi \in S_n$ ein r-Zyklus. Ermitteln Sie die Ordnung von π in S_n und den Zyklentyp der k-ten Potenz von π, für $k \in \mathbb{Z}$.

29. Bestimmen Sie alle Normalteiler der S_4. (Es hilft, die Elemente der S_4 nach Zyklentyp geordnet anzuschreiben.)

30. Sei p eine Primzahl, dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Gruppe der Ordnung p, und genau zwei verschiedene Gruppen der Ordnung p^2. Nämlich welche?