Algebra Übungen WS02/03

1. Finden Sie möglichst viele Unterhalbgruppen des Monoids $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Wieviele endliche Unterhalbgruppen gibt es? Haben alle Unterhalbgruppen, die Monoide sind, dasselbe neutrale Element wie $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

2. Seien X, Y nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Eine Linksinverse von f ist eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$; eine Rechtsinverse von f ist eine Funktion $h\colon Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

(a) $\exists\, g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (d.h. f hat eine Linksinverse) $\iff$ f ist injektiv.

(b) $\exists\, h\colon Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ (d.h. f hat eine Rechtsinverse) $\iff$ f ist surjektiv.

(c) Im Monoid $(X^X, \circ)$ der Funktionen auf X sind die invertierbaren Elemente genau die bijektiven Funktionen.

3. Sei $(H, +)$ eine Halbgruppe [bzw. Gruppe] und $M \neq \emptyset$ eine Menge. Auf der Menge der Funktionen $H^M = \{f\colon M \to H \mid f \text{ Funktion}\}$ ist eine Operation $+$ gegeben durch punktweise Addition, d.h., $f + g$ ist definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (die Addition rechts ist die in H). Zeigen Sie, daß $(H^M, +)$ eine Halbgruppe [bzw. Gruppe] ist. Wenn H kommutativ ist, dann auch $(H^M, +)$.

4. Für nicht-leere Teilmengen A, B eines Monoids $(H, \cdot)$ ist das Komplexprodukt von A und B defniert als

$$AB = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

(Statt 1-elementiger Teilmengen schreibt man nur das entsprechende Element an, also aB statt $\{a\}B$.) Zeigen Sie, daß die nicht-leeren Teilmengen von H mit dieser Multiplikation ein Monoid bilden, und bestimmen Sie die invertierbaren Elemente in diesem Monoid.

5. Sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe. In der Menge der Worte über dem Alphabet $H \cup \{(,), \cdot\}$ sind die „Produkte" induktiv definiert wie folgt:

(i) Jedes $a \in H$ ist ein Produkt.

(ii) Wenn P und Q Produkte sind, dann ist auch $(P \cdot Q)$ ein Produkt.

Ein Produkt P heißt Produkt der Elemente $a_1, \ldots a_n \in H$ (in dieser Reihenfolge), wenn genau das Wort $a_1 \ldots a_n$ überbleibt, wenn man alle Klammern und Multiplikationszeichen in P wegläßt.

Jedes Produkt bezeichnet (durch Ausmultiplizieren) ein Element von H. Zeigen Sie, daß alle Produkte von $a_1, \ldots a_n$ (in dieser Reihenfolge) in H dasselbe Element bezeichnen. Tip: zeigen Sie, daß jedes Produkt von $a_1, \ldots a_n$ dasselbe Element ergibt wie das rechtsbündig geklammerte Produkt $(a_1 \cdot (a_2 \cdot (\ldots\ldots (a_{n-2} \cdot (a_{n-1} \cdot a_n))\ldots)))$.

6. Sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe [ein Monoid], a, $b \in H$, m, $n \in \mathbb{N}$, $[m, n \in \mathbb{N}_0]$, dann gilt

(a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(b) $(a^m)^n = a^{mn}$

(b) $a \cdot b = b \cdot a \Longrightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Formulieren Sie auch die analogen Regeln für additiv geschriebene Halbgruppen.

7. Sei $(H,\cdot)$ eine Halbgruppe und e ein zusätzliches Element, $e \notin H$. Wenn man die Multiplikation von H auf $M = H \cup \{e\}$ erweitert, indem man $\forall h \in H\ h \cdot e = h$ und $\forall h \in H\ e \cdot h = h$ und $e \cdot e = e$ definiert, dann ist $(M,\cdot)$ ein Monoid.

8. Sei $(G,\cdot)$ eine Halbgruppe mit einem Element $e \in G$, sodaß
(1) $\forall a \in G \quad e \cdot a = a$ $\quad$ (e ist linksneutrales Element) und
(2) $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G \quad a^{-1} \cdot a = e$ $\quad$ (jedes a hat ein Linksinverses),
dann ist G eine Gruppe.
(Mit rechtsneutralem Element und Rechtsinversen geht's natürlich auch.)

9. Sei $(H,\cdot)$ eine Halbgruppe, sodaß
i) $\forall a,\, b \in H\ \exists c \in H\ ac = b$ und
ii) $\forall a,\, b \in H\ \exists d \in H\ da = b$,
dann ist $(H,\cdot)$ eine Gruppe.

10. Sei $(H,\cdot)$ eine endliche Halbgruppe, in der jedes Element rechts und links kürzbar ist, dann ist $(H,\cdot)$ eine Gruppe.