82. Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit einer mehrfachen Nullstelle in seinem Zerfällungskörper. Dann gilt $\chi(K) = p$ und f hat die Form $a_0 + a_1x^p + \ldots + a_kx^{kp} + \ldots + a_nx^{np}$ (mit $a_k \in K$). (Hinweis: $\mathrm{ggT}(f, f') \neq 1$ und f irreduzibel impliziert $f' = 0$.)

83. Sei K ein Körper mit $\chi(K) = p$, sodaß der Frobenius-Homomorphismus $\varphi\colon K \to K$, $\varphi(x) = x^p$, surjektiv ist. Dann ist kein Polynom der Gestalt $a_0 + a_1x^p + \ldots + a_kx^{kp} + \ldots + a_nx^{np}$ (mit $a_k \in K$) irreduzibel in $K[x]$.

84. Sei G eine Abelsche Gruppe, die Elemente endlicher Ordnung (ungleich dem neutralen Element) enthält. Dann ist G nicht frei Abelsch.

85. $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht frei Abelsch. (Hinweis: je zwei Elemente sind $\mathbb{Z}$-linear-abhängig.)

86. $\big((\mathbb{Q} \setminus \{0\})/\{1, -1\}, \cdot\big)$ ist frei Abelsch.

87. $(\mathbb{R}, +)$ ist nicht frei Abelsch. (Hinweis: jede $\mathbb{Z}$-l.u. Menge ist auch $\mathbb{Q}$-l.u.)

88. Sei A eine Abelsche Gruppe mit einer Teilmenge $X \subseteq A$, sodaß jede Funktion $f\colon X \to B$ (mit B einer Abelschen Gruppe) eindeutig zu einem Gruppenhomomorphismus $\bar{f}\colon A \to B$ fortgesetzt werden kann. Dann ist A eine freie Abelsche Gruppe mit Basis X.

89. Für $1 \leq i \leq n$ sei G_i eine Gruppe und H_i ein Normalteiler von G_i. Sei $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ und $H = \{(g_1, \ldots, g_n) \in G \mid g_i \in H_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$. Dann gilt $G/H \simeq (G_1/H_1) \times \ldots \times (G_n/H_n)$.

90. Geben Sie ein Beispiel eines Normalteilers einer Gruppe $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, der nicht von der Form $\{(g_1, \ldots, g_n) \in G \mid g_i \in H_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$ für gewisse Normalteiler H_i von G_i ist.

91. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, k) = 1$. Geben Sie einen Ring-Isomorphismus $\varphi\colon Z_{nk} \to Z_n \times Z_k$ an. Zeigen Sie die Bijektivität auf zwei Arten, einmal mit Chinesischem Restsatz (Surjektivität), einmal ohne diesen (Injektivität).

92. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, k) \neq 1$. Zeigen Sie, daß die additiven Gruppen Z_{nk} und $Z_n \times Z_k$ nicht isomorph sind.