70. Sei A der Körper aller komplexen Zahlen, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind. Dann ist $A{:}\,\mathbb{Q}$ eine unendlichdimensionale algebraische Körpererweiterung.

71. Sei $f \in K[x]$, $\deg(f) = n > 0$; F der Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie, daß $[F : K]$ ein Teiler von $n!$ ist. Hinweis: Fallunterscheidung, ob f irreduzibel oder nicht.

72. Bestimmen Sie die primen Elemente von $\mathbb{Z}[i]$.

73. Sei $u \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom $f \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie: es existiert ein normiertes Polynom $g \in \mathbb{Z}[x]$ mit $g(u) = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathbb{Z}[x]$.

74. Sei $u \in F \supseteq K$ algebraisch von ungeradem Grad über K (d.h. der Grad des Minimalpolynoms von u über K ist ungerade). Dann ist $K[u] = K[u^2]$.

75. Zum Ring der Brüche: Sei S multiplikative Teilmenge eines kommutativen Rings R, I ein Ideal von R, und $\pi{:}\, R \to R/I$ die kanonische Projektion. Geben Sie einen Isomorphismus an:
$$(\pi(S))^{-1}(R/I) \simeq S^{-1}R/S^{-1}I$$
und folgern Sie daraus als Spezialfall, für jedes Primideal P:
$$((R/P) \setminus \{0 + P\})^{-1}R/P \simeq R_P/P_P.$$

76. Seien K, E_1, E_2 und E Körper mit $K \subseteq E_i \subseteq E$, sodaß $[E_i : K]$ endlich für $i = 1, 2$ und $E = K(E_1 \cup E_2)$. Dann gilt $[E : K] \leq [E_1 : K][E_2 : K]$.

77. Sei R ein Ring mit der Eigenschaft: zu je zwei verschiedenen Elementen a, b in R gibt es ein Polynom $f \in R[x]$ mit $f(a) = 1$, $f(b) = 0$. Dann ist R ein Körper.

78. Sei K ein Körper und $\varphi{:}\, K \longrightarrow K$ ein Automorphismus. Dann ist die Menge der Fixpunkte von φ, $F = \{a \in K \mid \varphi(a) = a\}$, ein Körper.

79. Bestimmen Sie Elementarteiler und invariante Faktoren von $\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{125}$.

80. Ist die Gruppe aus Bsp. 79 isomorph zu $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{225} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{60}$?

81. Ist die Gruppe aus Bsp. 79 isomorph zu $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{56} \times \mathbb{Z}_{75} \times \mathbb{Z}_{90}$?