Algebra Übungen 6 WS 05/06

61. Sei R ein Hauptidealbereich. Dann gilt für Ideale A, B, C von R

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C) \quad \text{und} \quad A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

62. Zeigen Sie durch Gegenbeispiele, daß weder $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$ noch $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ für Ideale in einem ZPE-Ring gelten muß.

63. Sei R ein kommutativer Ring mit 1, sodaß jedes Kongruenzensystem $x \equiv b_i \pmod{A_i}$ mit $b_i \in R, A_i \trianglelefteq R$ $(i = 1, \ldots n)$, welches $b_i - b_j \in A_i + A_j$ erfüllt, eine Lösung in R hat. Zeigen Sie, daß für Ideale A, B, C von R gilt $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

64. Formulieren Sie für einen Euklidischen Ring R einen Algorithmus zur Lösung von Kongruenzensystemen $x \equiv b_i \pmod{a_i}$ mit $b_i \in R$ beliebig, $a_i \in R$ mit $\mathrm{ggT}(a_i, a_j) = 1$ für $i \neq j$, und demonstrieren Sie diesen durch Lösung des Systems

$$x \equiv 5 \pmod{15} \quad x \equiv 2 \pmod{11} \quad x \equiv 3 \pmod{4}$$

65. Formulieren Sie für einen Euklidischen Ring R einen Algorithmus zur Lösung von Kongruenzensystemen $x \equiv b_i \pmod{a_i}$ mit $a_i \in R$ beliebig und $b_i \in R$ mit $b_i - b_j$ teilbar durch $\mathrm{ggT}(a_i, a_j)$, und demonstrieren Sie diesen durch Lösung des Systems

$$x \equiv 7 \pmod{15} \quad x \equiv 10 \pmod{6} \quad x \equiv 2 \pmod{10}$$

66. Sei K ein Körper und $v \colon K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion mit
(1) $v(r + s) \geq \min(v(r), v(s))$
(2) $v(rs) = v(r) + v(s)$
(für alle $r, s \in K$, für welche die Ausdrücke definiert sind). Zusätzlich sei $v(0) = \infty$ definiert. Sei $R = \{k \in K \mid v(k) \geq 0\}$, dann ist R ein Ring mit genau einem maximalen Ideal $M = \{r \in R \mid v(r) > 0\}$ und die Einheiten von R sind genau die Elemente mit $v(r) = 0$.

67. Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K, und $f, g, h \in K[x]$ drei normierte Polynome (d.h. Leitkoeffizient jeweils 1), sodaß $f = g \cdot h$. Zeigen Sie: wenn $f \in R[x]$, dann auch $g, h \in R[x]$.

68. Seien $A_1, \ldots A_n \trianglelefteq R$ Ideale eines kommutativen Rings mit 1, sodaß für beliebige $b_i \in R$ das Kongruenzensystem $x \equiv b_i \pmod{A_i}$ eine Lösung in R hat, dann gilt für $i \neq j$: $A_i + A_j = R$.

69. Sei K ein Körper der Charakteristik p und $a \in K$. Zeigen Sie:
(i) Wenn das Polynom $f(x) = x^p - a$ eine Nullstelle $b \in K$ hat, dann zerfällt f über K in p gleiche Linearfaktoren.
(ii) Wenn $f(x) = x^p - a$ keine Nullstelle in K hat, dann ist f irreduzibel in $K[x]$. (Hinweis: Nullstelle b von f adjungieren, (i) auf $L = K[b]$ anwenden. Können nichttriviale Faktoren von f in $K[x]$, bzw. deren konstante Terme in K sein, ohne daß schon b in K ist?)