52. Sei R kommutativer Ring mit 1. Skizzieren Sie einen Beweis der Tatsache, daß jedes Ideal I von $M_n(R)$ die Form $M_n(J)$ für ein Ideal J von R hat. (Hinweis: das von allen Eintagungen in Matrizen aus I erzeugte Ideal J von R betrachten; weiters Produkte von Matrizen aus I mit (von rechts und links) Matrixeinheiten wie e_{ij}, der Matrix, die an der Stelle (i, j) die Eintragung 1 hat, sonst nur 0, betrachten.)

53. Sei R ein Ring, a, $b \in R$. Dann gilt $(ab) \subseteq (a)(b)$.
Wenn R kommutativ ist, dann gilt $(ab) = (a)(b)$.

54. Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und $v\colon R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit den Eigenschaften
(1) $v(r + s) \geq \min(v(r), v(s))$
(2) $v(rs) = v(r) + v(s)$
(für alle $r, s \in R$, für welche die Ausdrücke definiert sind), dann kann v auf eindeutige Weise zu $v\colon K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften (1) und (2) fortgesetzt werden.

55. Sei K ein Körper und $v\colon K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion, sodaß
(1) $v(r + s) \geq \min(v(r), v(s))$
(2) $v(rs) = v(r) + v(s)$
(für alle $r, s \in K$, für welche die Ausdrücke definiert sind). Dann gilt: $v(-1) = 0$, $v(-r) = v(r)$, und für alle $r, s \in K$, mit $v(r) \neq v(s)$ gilt $v(r + s) = \min(v(r), v(s))$.

56. Geben Sie einen Isomorphismus an zwischen $M_n(R[x])$, dem Ring der $n \times n$ Matrizen mir Eintragungen im Polynomring $R[x]$, und $M_n(R)[x]$, dem Polynomring in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in $M_n(R)$. (Hiebei ist R ein kommutativer Ring mit Eins.)

57. Seien f, g und h Polynome in $R[x]$ (R ein kommutativer Ring mit Eins), davon f ein normiertes Polynom (d.h. mit Leitkoeffizient 1) sodaß $f \cdot g = h$. Sei S ein Unterring von R. Zeigen Sie: wenn f und h in $S[x]$, dann auch $g \in S[x]$.

58. Sei D ein Integritätsbereich und kein Körper, dann ist $D[x]$ kein Hauptidealring. (Betrachten Sie das Ideal jener Polynome, deren konstanter Term in I liegt, I ein nichttriviales Ideal von D.)

59. Wenn S Unterring von R, dann ist $\chi(S)$ ein Teiler von $\chi(R)$. (Dabei gilt jede ganze Zahl als Teiler von 0.)

60. Sei R ein Integritätsbereich, dann gilt

$$R = \bigcap_{P \max} R_P$$

(P durchläuft alle maximalen Ideale von R), wobei jedes R_P als Unterring des Quotientenkörpers K von R gedacht ist, $R_P = \{k \in K \mid \exists a \in R, b \in R \setminus P\colon k = a/b\}$. (Hinweis: für $k \in K$ die Menge aller in Bruchdarstellungen von k auftretenden Nenner betrachten: sie ist ein Ideal.)