40. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei (d.h., durch kein Quadrat einer Primzahl teilbar). Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = \{a + b\sqrt{-d} \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Die „Norm“ $N\colon R \to \mathbb{Z}$, definiert durch $N(a + b\sqrt{-d}) = a^2 + db^2$ (für $a,\, b \in \mathbb{Z}$) ist multiplikativ: $N(rs) = N(r)N(s)$.

(ii) $r \in R$ ist eine Einheit in R genau dann, wenn $N(r)$ eine Einheit in $\mathbb{Z}$ ist. (Hinweis: ein Teiler einer Einheit ist auch eine Einheit.)

41. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, daß 2 und 3 irreduzible Elemente von R sind. (Hinweis: Norm betrachten).

42. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(i) Zeigen Sie, daß 6 zwei verschiedene Darstellungen als Produkt irreduzibler Elemente hat.

(ii) Zeigen Sie, daß weder 2 noch 3 ein primes Element von R ist.

43. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale.

44. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. R hat nur ein einziges maximales Ideal genau dann, wenn die Nicht-Einheiten von R ein Ideal bilden.

45. Sei R ein Integritätsbereich und $a, a', b, b', d \in R$, wobei d ein ggT von a, b ist und $a = a'd$, $b = b'd$. Dann gilt $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$.

46. Sei R ein ZPE-Ring und $a,\, b,\, c \in R$. Wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $a \mid bc$, dann folgt $a \mid c$.

47. Zeigen Sie (in einem beliebigen kommutativen Ring) unter der Annahme, daß alle erwähnten ggT existieren:

$$\mathrm{ggT}(a,\, \mathrm{ggT}(b, c)) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b),\, c)$$

Hinweis: ggT dreier Elemente definieren, dieser bis auf gegenseitiges Teilen eindeutig; beide Objekte erfüllen die Definition.

48. Sei R ein kommutativer Ring, S eine multiplikative Teilmenge von R und

$$\bar{S} = \{t \in R \mid \exists s \in S\, \exists r \in R\, rt = s\}.$$

Dann ist $S^{-1}R$ isomorph zu $\bar{S}^{-1}R$.

49. Seien R, S und $\bar{S}$ wie im vorigen Beispiel. Ein Element $\frac{r}{s}$ von $S^{-1}R$ ist invertierbar genau dann, wenn $r \in \bar{S}$.

50. Sei R ein Euklidischer Ring, dessen Rangfunktion $\rho(ab) \geq \rho(a)$ (für $a, b \in R$ mit $ab \neq 0$) erfüllt. Zeigen Sie: $u \in R$ ist Einheit genau dann, wenn u minimalen Rang hat (d.h., wenn $\rho(u) = \min\{\rho(a) \mid a \in R \setminus \{0\}\}$).

51. Zeigen Sie, daß $R = \mathbb{Z}[i]$ ein Euklidischer Ring ist mit der Rangfunktion $N(a + bi) = a^2 + b^2$ (für $a, b \in \mathbb{Z}$). (Hinweis: zuerst Division mir Rest von Elementen aus R durch Elemente aus $\mathbb{N}$ zeigen; dann Division von $r \in R$ durch $z \in R$ (wobei $z \neq 0$) via Divison von $r\bar{z}$ durch $z\bar{z}$ zeigen.)