26. Sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe. Dann bilden die Endomorphismen von G, $\text{End(G)} = \{\varphi: G \to G \mid \varphi(g+h) = \varphi(g) + \varphi(h)\}$, einen Ring mit Eins $(\text{End(G)}, +, \circ)$ bzgl. elementweiser Addition $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ und der Verknüpfung von Funktionen als Multiplikation $(\varphi \circ \psi)(g) = \varphi(\psi(g))$.

27. Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt
(i) $A \leq G \implies f(A) \leq H$,
(ii) $B \trianglelefteq G \implies f(B) \trianglelefteq f(G)$, aber $B \trianglelefteq G \not\Longrightarrow f(B) \trianglelefteq G$,
(iii) $K \leq H \implies f^{-1}(K) \leq G$,
(iv) $M \trianglelefteq H \implies f^{-1}(M) \trianglelefteq G$.

28. Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. dann gilt
(i) $\forall A \subseteq G \;\; f^{-1}(f(A)) = A\text{Ker}f$,
(ii) $\forall C \subseteq H \;\; f(f^{-1}(C)) = C \cap \text{Im}(f)$.

29. Seien f und g Gruppenhomomorphismen, f, $g: G \to H$ und $A \subseteq G$. Dann gilt
(i) $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$
(ii) Wenn $\forall\, a \in A \;\; f(a) = g(a)$, dann $\forall\, b \in \langle A \rangle \;\; f(b) = g(b)$.

30. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $(C_n, \cdot)$ die zyklische Gruppe der Ordnung n. Bestimmen Sie
(i) alle Gruppenhomomorphismen $\varphi: C_n \to C_m$
(ii) alle Automorphismen von C_n

31. Seien H und K Untergruppen von G. Dann ist $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ genau dann eine Untergruppe von G, wenn $HK = KH$ gilt. (Daher gilt für jeden Normalteiler N von G und jede Untergruppe H von G: NH ist Untergruppe von G.)

32. Im Ring $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ ist $\bar{k} = k + m\mathbb{Z}$ genau dann ein Nullteiler, wenn $\text{ggT}(k, m) \neq 1$. Daraus folgt: $\mathbb{Z}_m$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

33. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und a, $b \in G$ mit $|a|$, $|b|$ endlich.
(i) Wenn $\text{ggT}(|a|, |b|) = 1$ und $ab = ba$, dann gilt $|ab| = |a||b|$.
(ii) Etwas allgemeiner: wenn $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ und $ab = ba$, dann folgt $|ab| = \text{kgV}(|a|, |b|)$.

34. Sei $\sigma \in S_m$ ein n-Zyklus. Bestimmen Sie die Ordnung von σ, sowie den Zyklentyp von σ^k für $1 \leq k \leq n$.

35. Sei $\pi \in S_n$ vom Zyklentyp $[t_1, \ldots, t_n]$. Bestimmen Sie die Ordnung von π.

36. Sei G eine endliche p-Gruppe und H ein nicht-trivialer Normalteiler von G. Dann ist auch der Durchschnitt von H mit $\text{Z}(G) = \{a \in G \mid \forall b \in G \; ab = ba\}$, dem Zentrum von G, nicht trivial.

37. Sei G Gruppe, und S, $T \leq G$. Zeigen Sie $|ST| = |S|\,[T : S \cap T]$.
Wenn S und T endlich sind, dann gilt

$$|ST| = \frac{|S|\,|T|}{|S \cap T|}\,.$$

38. Jede Gruppe der Ordnung 56 hat einen nichttrivialen Normalteiler.

39. Jede Gruppe der Ordnung 200 hat einen nichttrivialen Normalteiler.