14. Gegeben ein Tetraeder mit Eckpunkten a, b, c, d. Bestimmen Sie die Gruppe der Permutationen von a, b, c, d, die sich durch Drehungen des Tetraeders im 3-dim Raum ergeben.

15. Sei H der Stabilisator des Punktes a in der Gruppe G aus Bsp. 14. Geben Sie die Partition von G in Linksnebenklassen bzw. Rechtsnebenklassen von H an.

16. Sei D_n die Symmetriegruppe des regelmässigen n-Ecks (die Gruppe jener Permutationen der Eckpunkte, die sich aus den Drehungen und Spiegelungen der 2-dim Ebene, die das n-Eck auf sich abbilden, ergeben). Zeigen Sie, daß die Drehungen einen Normalteiler bilden.

17. (i) Eine endliche Teilmenge $H \neq \emptyset$ einer Gruppe G ist schon eine Untergruppe, wenn nur $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.
(ii) Für unendliche Teilmengen stimmt das nicht. (Finden Sie zusätzlich zu den in Vorlesung und Skriptum genannten ein weiteres Gegenbeispiel).

18. Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, e_G, e_H das neutrale Element in G bzw. H, dann gilt

$$f(e_G) = e_H \quad \text{und} \quad \forall a \in G\ f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

Wenn G und H nur Monoide sind, $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus: können Sie eine möglichst schwache Voraussetzung (eine Forderung an das Bild von G unter f) formulieren, aus der $f(e_G) = e_H$ folgt?

19. Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt für jedes Element a von endlicher Ordnung $|a|$ in G: die Ordnung von $f(a)$ in H teilt $|a|$.

20. Gegeben ein Würfel im 3-dim Raum, G die Gruppe der Drehungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden. Stellen Sie die Elemente der Gruppe G auf drei verschiedene Arten dar (Matrizen, Permutationen verschiedener Teile des Würfels - es gibt mehr als drei naheliegende Darstellungen).

21. Welche der folgenden Gruppen sind zueinander isomorph? 1) $\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\big)$ 2) $\big(\mathbb{R}, +\big)$ 3) $S^1 = \big(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot\big)$ 4) $\big(\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \cdot\big)$ 5) $\big(\mathbb{R}, +\big)/\big(\mathbb{Z}, +\big)$

22. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G, dann ist die Klasse von e ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$, und es gilt: $a \equiv b$ genau dann, wenn $a^{-1}b \in N$.

23. $\mathbb{Z}_n$ bezeichne die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. $f\colon \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3$, $f(x + 9\mathbb{Z}) = x + 3\mathbb{Z}$ ist ein Gruppen-Epimorphismus, der keine Rechtsinverse, die Gruppen-Homomorphismus ist, hat.

24. $g\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9$, $g(x + 3\mathbb{Z}) = 3x + 9\mathbb{Z}$ ist ein Gruppen-Monomorphismus, der keine Linksinverse, die Gruppen-Homomorphismus ist, hat.

25. Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus [bzw. Ringhomomorphismus], $\leq$ heisse *Untergruppe* [bzw. *Unterring*], $\trianglelefteq$ heisse *Normalteiler* [bzw. *Ideal*], dann gilt
(i) $A \leq G \implies f(A) \leq H$,
(ii) $B \trianglelefteq G \implies f(B) \trianglelefteq f(G)$ (aber $B \trianglelefteq G \not\Longrightarrow f(B) \trianglelefteq H$),
(iii) $K \leq H \implies f^{-1}(K) \leq G$,
(iv) $M \trianglelefteq H \implies f^{-1}(M) \trianglelefteq G$.