

1. Sei  $(H, \cdot)$  eine Halbgruppe und  $e$  ein zusätzliches Element,  $e \notin H$ . Wenn man die Multiplikation von  $H$  auf  $M = H \cup \{e\}$  erweitert, indem man  $\forall h \in H \ h \cdot e = h$  und  $\forall h \in H \ e \cdot h = h$  und  $e \cdot e = e$  definiert, dann ist  $(M, \cdot)$  ein Monoid.
2. Finden Sie möglichst viele Unterhalbgruppen des Monoids  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ . Wieviele endliche Unterhalbgruppen gibt es? Haben alle Unterhalbgruppen, die Monoide sind, dasselbe neutrale Element wie  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ?
3. Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen und  $f: X \rightarrow Y$  eine Funktion. Eine Linksinverse von  $f$  ist eine Funktion  $g: Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$ ; eine Rechtsinverse von  $f$  ist eine Funktion  $h: Y \rightarrow X$  mit  $f \circ h = \text{id}_Y$ .
  - (a)  $\exists g: Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$  (d.h.  $f$  hat eine Linksinverse)  $\iff f$  ist injektiv.
  - (b)  $\exists h: Y \rightarrow X$  mit  $f \circ h = \text{id}_Y$  (d.h.  $f$  hat eine Rechtsinverse)  $\iff f$  ist surjektiv.
  - (c) Im Monoid  $(X^X, \circ)$  der Funktionen auf  $X$  sind die invertierbaren Elemente genau die bijektiven Funktionen.
4. Für nicht-leere Teilmengen  $A, B$  eines Monoids  $(H, \cdot)$  ist das Komplexprodukt von  $A$  und  $B$  definiert als

$$AB = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$$

(Statt 1-elementiger Teilmengen schreibt man nur das entsprechende Element an, also  $aB$  statt  $\{a\}B$ .) Zeigen Sie, daß die nicht-leeren Teilmengen von  $H$  mit dieser Multiplikation ein Monoid bilden, und bestimmen Sie die invertierbaren Elemente in diesem Monoid.

5. Sei  $(H, \cdot)$  eine Halbgruppe. In der Menge der Worte über dem Alphabet  $H \cup \{(\cdot), \cdot\}$  sind die „Produkte“ induktiv definiert wie folgt:
  - (i) Jedes  $a \in H$  ist ein Produkt.
  - (ii) Wenn  $P$  und  $Q$  Produkte sind, dann ist auch  $(P \cdot Q)$  ein Produkt.
 Ein Produkt  $P$  heißt Produkt der Elemente  $a_1, \dots, a_n \in H$  (in dieser Reihenfolge), wenn genau das Wort  $a_1 \dots a_n$  überbleibt, wenn man alle Klammern und Multiplikationszeichen in  $P$  wegläßt.
 

Jedes Produkt bezeichnet (durch Ausmultiplizieren) ein Element von  $H$ . Zeigen Sie, daß alle Produkte von  $a_1, \dots, a_n$  (in dieser Reihenfolge) in  $H$  dasselbe Element bezeichnen. Tip: zeigen Sie, daß jedes Produkt von  $a_1, \dots, a_n$  dasselbe Element ergibt wie das rechtsbündig geklammerte Produkt  $(a_1 \cdot (a_2 \cdot (\dots (a_{n-2} \cdot (a_{n-1} \cdot a_n))))$ .
6. Sei  $(H, \cdot)$  eine Halbgruppe [ein Monoid],  $a, b \in H$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , [ $m, n \in \mathbb{N}_0$ ], dann gilt
  - (a)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  - (b)  $(a^m)^n = a^{mn}$
  - (b)  $a \cdot b = b \cdot a \implies (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Formulieren Sie auch die analogen Regeln für additiv geschriebene Halbgruppen.

7. Sei  $R$  ein Ring;  $a$  heiße Links-Nullteiler, wenn  $\exists b \in R$  mit  $b \neq 0$  und  $a \cdot b = 0$ . Dann ist für  $a \in R$  quivalent:
- (1)  $a$  ist links kürzbar (d.h.  $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$ )
  - (2)  $a$  ist kein Links-Nullteiler
  - (3)  $L_a: R \rightarrow R, L_a(x) = a \cdot x$  ist injektiv.
- (Analoges gilt für rechts.) Folgerung: ein Ring ist genau dann nullteilerfrei, wenn jedes Element (rechts und links) kürzbar ist.
8. Sei  $R$  ein kommutativer Ring.
- (i) Wenn  $a \in R$  ein Nullteiler und  $b \in R$  beliebig, dann ist  $ab$  ein Nullteiler.
  - (ii) Die Menge der Nicht-Nullteiler von  $R$  ist multiplikativ abgeschlossen, d.h., wenn  $a$  kein Nullteiler und  $b$  kein Nullteiler, dann ist auch  $ab$  kein Nullteiler.
9. Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring und  $a, b, c \in R$ . Zeigen Sie
- (i)  $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$
  - (ii)  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$  und  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
  - (iii)  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$  und  $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
10. Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring,  $a, b \in R, k \in \mathbb{N}_0$  und  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie
- (i)  $(-a)^k = (-1)^k a^k$
  - (ii)  $(na) \cdot (mb) = (n \cdot m)(a \cdot b)$  (Hier ist  $n \cdot m$  das Produkt in  $\mathbb{Z}$ .)
  - (iii) Wenn  $R$  ein Einselement  $1_R$  hat, dann ist  $na = (n1_R) \cdot a = a \cdot (n1_R)$ .
11. Sei  $(G, \cdot)$  eine Halbgruppe mit einem Element  $e \in G$ , sodaß
- (1)  $\forall a \in G \quad e \cdot a = a$  ( $e$  ist linksneutrales Element) und
  - (2)  $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \quad a^{-1} \cdot a = e$  (jedes  $a$  hat ein Linksinverses),
- dann ist  $G$  eine Gruppe.  
(Mit rechtsneutralem Element und Rechtsinversen geht's natürlich auch.)
12. Sei  $(H, \cdot)$  eine Halbgruppe, sodaß für alle  $a \in H$  sowohl  $L_a: H \rightarrow H$  ( $L_a(x) = a \cdot x$ ) als auch  $R_a: H \rightarrow H$  ( $R_a(x) = x \cdot a$ ) surjektiv sind, dann ist  $(H, \cdot)$  eine Gruppe.
13. Sei  $R \neq \{0\}$  ein endlicher nullteilerfreier Ring. Dann ist  $R$  ein Schiefkörper. (Bemerkung: Tatsächlich ist — nach dem Satz von Wedderburn —  $R$  dann sogar ein Körper.)