Bitte alle Antworten begründen (i.e., beweisen).

59. Sei u eine komplexe dritte Wurzel aus 5. Welches ist das Minimalpolynom von u über $\mathbb{Q}$, und über $\mathbb{R}$?

60. Ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]{:}\,\mathbb{Q}$ eine einfache Erweiterung?

61. Was sind die Minimalpolynome über $\mathbb{Q}$ folgender komplexer Zahlen: $\frac{\sqrt{3}i+1}{2}$ und $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$?

62. Sei $K = \mathbb{Z}_p(y)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{Z}_p$. Das Polynom $x^p - y$ ist irreduzibel in $K[x]$ und hat im Zerfällungskörper über K eine p-fache Nullstelle.

63. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und a, $b \in G$ mit $|a|$, $|b|$ endlich.

(i) Wenn $\mathrm{ggT}(|a|, |b|) = 1$ und $ab = ba$, dann gilt $|ab| = |a||b|$.

(ii) Etwas allgemeiner: wenn $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$ und $ab = ba$, dann folgt $|ab| = \mathrm{kgV}(|a|, |b|)$.

64. Seien G, H endliche zyklische Gruppen. $G \times H$ ist zyklisch genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(|G|, |H|) = 1$.

65. Sei G Gruppe, und $S, T \le G$. Dann gilt $|ST| = |S|\,[T{:}\,S \cap T]$.
Wenn S und T endlich sind, dann gilt

$$|ST| = \frac{|S|\,|T|}{|S \cap T|}\,.$$

66. Sei H eine endliche p-Gruppe. Dann ist $\mathrm{Z}(H) \ne \{e\}$. (Allgemeiner: Wenn eine endliche p-Gruppe H Untergruppe einer endlichen Gruppe G ist, dann ist $H \cap \mathrm{Z}(G) \ne \{e\}$.)

67. Sei $N \trianglelefteq G$. Es existiert genau dann eine Untergruppe $K \le G$ mit $G = NK$ und $N \cap K = \{e\}$, wenn die kanonische Projektion $\pi{:}\, G \to G/N$ eine Rechtsinverse hat (d.h. wenn es einen Homomorphismus $f{:}\, G/N \to G$ mit $\pi \circ f = \mathrm{id}_{G/N}$ gibt); und wenn es so eine Untergruppe K gibt, dann ist sie isomorph zu G/N.

68. Sei G eine Gruppe; für $g \in G$ sei $\varphi_g{:}\, G \to G$ durch $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ definiert, und $\mathrm{Inn}(G) := \{\varphi_g \mid g \in G\}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G)$ ist Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$.

69. Sei p eine Primzahl, dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Gruppe der Ordnung p, und genau zwei verschiedene Gruppen der Ordnung p^2. Nämlich welche?

70. Jede Gruppe der Ordnung 56 hat einen nichttrivialen Normalteiler.

71. Jede Gruppe der Ordnung 200 hat einen nichttrivialen Normalteiler.