Algebra Übungen 6 WS 04/05

Notation: Für $i \neq j$ bezeichnet $E_{ij}(\lambda)$ eine quadratische Matrix (passender Grösse), die sich von der Einheitsmatrix (1 auf Diagonale, sonst 0) nur durch eine Eintragung λ in Position (i, j) unterscheidet.

51. Sei R ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge und $S^{-1}R$ der Ring der Brüche von R mit Nennern aus S.

(a) Sei $Q \trianglelefteq R$ ein Primideal von R mit $Q \cap S = \emptyset$; dann ist $S^{-1}Q$ ein Primideal von $S^{-1}R$.

(b) Sei J ein Primideal von $S^{-1}R$, dann ist $\varphi_S^{-1}(J)$ ein Primideal von R mit $\varphi_S^{-1}(J) \cap S = \emptyset$.

52. Im Ring $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ ist $\bar{k} = k + m\mathbb{Z}$ genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(k, m) = 1$.

Daraus folgt: $\mathbb{Z}_m$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

53. Im Ring $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ ist $\bar{k} = k + m\mathbb{Z}$ genau dann ein Nullteiler, wenn $\mathrm{ggT}(k, m) \neq 1$.

Auch daraus folgt: $\mathbb{Z}_m$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

54. Ein kommutativer Ring heißt Noethersch, wenn jedes Ideal endlich erzeugt ist. Für einen kommutativen Ring R sind äquivalent:

(1) R ist Noethersch

(2) R erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Ideale

(3) Jede Menge von Idealen von R enthält (mindestens) ein (in bezug auf die Halbordnung durch Inklusion) maximales Element.

55. Sei K ein Körper und T ein Unterraum des K-Vektorraums der $n \times 1$ Spaltenvektoren mit Eintragungen in K. Dann ist die Menge der Matrizen in $M_n(K)$, deren Spalten alle aus T sind, ein Rechtsideal von $M_n(K)$. (Analog für Zeilen und Linksideal.)

56. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem Rechtsideal J von $M_n(K)$ gibt es einen Unterraum T der $n \times 1$ Spaltenvektoren, sodaß J wie im vorigen Beispiel genau aus den Matrizen mit Spalten aus T besteht. (Analog für Zeilen und Linksideal.)

57. Sei $(F, +)$ eine freie Abelsche Gruppe mit Basis $e_1, \ldots, e_n$, und $w_1, \ldots, w_m \in F$. Wenn $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ jene Matrix ist, deren k-te Zeile die Koeffizienten von w_k zur Basis $e_1, \ldots, e_n$ enthält, d.h. $w_k = a_{k1}e_1 + \ldots + a_{kn}e_n$, dann gilt:

$A \cdot E_{ji}(\lambda)$ ist jene Matrix, deren k-te Zeile die Koeffizienten von w_k zur Basis $e'_1, \ldots, e'_n$ mit $e'_j = e_j - \lambda e_i$ und $e'_l = e_l$ ($l \neq j$) enthält.

58. Seien $(F, +)$, $e_1, \ldots, e_n$, $w_1, \ldots, w_m$, und die Matrix A wie in Beispiel 57. Dann gilt

$E_{ji}(\lambda) \cdot A$ ist jene Matrix, deren k-te Zeile die Koeffizienten von w'_k zur Basis $e_1, \ldots, e_n$ enthält, wobei $w'_j = w_j + \lambda w_i$ und $w'_l = w_l$ ($l \neq i$).