42. Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K; $f \in R[x]$ primitiv, so, daß $f = gh$ mit $g, h \in K[x]$. Dann existiert ein $a \in K$ mit $ag = \tilde{g}$, $a^{-1}h = \tilde{h}$, wobei $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ primitive Polynome in $R[x]$ sind.

43. Sei R ein Hauptidealring. Dann gilt $(A+B) \cap (A+C) = A + (B \cap C)$ für beliebige Ideale A, B, C von R.

44. Sei R ein Ring, dessen Ideale $(A+B) \cap (A+C) = A + (B \cap C)$ erfüllen. Dann gilt folgende Version des Chinesischen Restsatzes: Gegeben Ideale $A_1, \ldots, A_n$ von R und Elemente $b_1, \ldots, b_n \in R$ sodaß für $i \neq j$ jeweils $b_i - b_j \in A_i + A_j$, dann existiert ein $b \in R$ mit $b \equiv b_i \mod A_i$ ($1 \leq i \leq n$).

45. Sei S eine Menge, $\mathcal{P}(S)$ die Menge aller Teilmengen von S. Für $A, B \in \mathcal{P}(S)$ sei

$$A + B := A \mathbin{\triangle} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{und} \qquad A \cdot B := A \cap B$$

definiert. Mit dieser Addition und Multiplikation ist $\mathcal{P}(S)$ ein „Boole'scher Ring", d. h. ein kommutativer Ring mit Eins, in dem $a^2 = a$ für jedes Element a gilt, und dieser Ring ist isomorph zu $\prod_{x \in S} \mathbb{Z}_2$ (direktes Produkt je einer Kopie von $\mathbb{Z}_2$ für jedes Element von S).

46. Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K und $f, g, h \in K[x]$ normierte Polynome mit $f \cdot g = h$. Wenn $h \in R[x]$, dann folgt $f \in R[x]$ und $g \in R[x]$.

47. Seien R, S Ringe mit Eins, $g\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

(i) Wenn ein $v \in \operatorname{Im}(g)$ existiert, das kein Nullteiler ist, dann ist $g(1) = 1$ und

(ii) wenn $g(1) = 1$, dann ist für jede Einheit $u \in R$ auch $g(u)$ Einheit in S mit $g(u)^{-1} = g(u^{-1})$.

48. Sei R ein Ring und $(H, *)$ ein Monoid mit der Eigenschaft, daß es für jedes $h \in H$ nur endlich viele $g, k \in H$ mit $g * k = h$ gibt. Dann ist $R(H)$, definiert durch $(R(H), +) = (\sum_{h \in H} R, +)$ und

$$(r_h)_{h \in H} \cdot (s_h)_{h \in H} = (t_h)_{h \in H} \qquad \text{mit} \qquad t_h = \sum_{\substack{g,\, k \in H \\ g * k = h}} r_g s_k$$

ein Ring.

49. Für den Ring aus Bsp. 48 gilt: Wenn R ein Einselement hat, dann auch $R(H)$; wenn R und H beide kommutativ sind, dann ist auch $R(H)$ kommutativ.

R ist eingebettet in $R(H)$ (geben Sie einen Ring-Monomorphismus $\varphi\colon R \to R(H)$ an). Wenn R ein Einselement hat, dann ist auch H eingebettet in $(R, \cdot)$ (geben Sie einen Monoid-Monomorphismus $\psi\colon (H, *) \to (R(H), \cdot)$ an).

50. (i) Wenn R Integritätsbereich, $p \in R$, dann gilt

$$p \text{ prim} \iff (p) \text{ Primideal} \neq (0)$$

(ii) Wenn R Integritätsbereich, $c \in R$, dann gilt

$$c \text{ irreduzibel} \iff (c) \neq (0) \text{ und } (c) \text{ maximal unter den Hauptidealen} \neq R$$

((c) maximal unter den Hauptidealen $\neq R$ heißt, daß für alle $d \in R$ mit $(d) \neq R$ gilt: wenn $(c) \subseteq (d)$, dann $(c) = (d)$.)