E. Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes Polynom. Wenn für eine Primzahl p das Polynom $\bar{f}$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ (das aus f hervorgeht, indem man die Koeffizienten modulo p nimmt), irreduzibel ist, dann ist f in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel. Geben Sie ein Beispiel, daß das für ein nicht normiertes Polynom nicht gelten muß.

34. Sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe. Dann bilden die Endomorphismen von G, $\mathrm{End(G)} = \{\varphi\colon G \to G \mid \varphi(g+h) = \varphi(g) + \varphi(h)\}$, einen Ring mit Eins $(\mathrm{End(G)}, +, \circ)$ bzgl. elementweiser Addition $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ und der Verknüpfung von Funktionen als Multiplikation $(\varphi \circ \psi)(g) = \varphi(\psi(g))$.

35. Sei R ein Ring, $\chi(R) = n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von n. S sei die Menge $\mathbb{Z}_m \times R$ mit der Addition $(\bar{k}, r) + (\bar{l}, s) = (\overline{k+l},\, r+s)$ und der Multiplikation $(\bar{k}, r) \cdot (\bar{l}, s) = (\overline{k \cdot l},\, ks + lr + r \cdot s)$, dann gilt:

S ist Ring mit Eins, $\chi(S) = m$, und wenn R kommutativ ist, dann auch S. Ausserdem enthält S ein Ideal, das als Ring isomorph zu R ist.

36. Sei R ein Integritätsbereich. Dann gilt $R = \bigcap_{P \text{ Prim}} R_P = \bigcap_{M \text{ maximal}} R_M$ (Die Lokalisierungen R_P sind als Unterringe des Quotientenkörpers von R zu denken.)

37. Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K und $p \in R$ prim. Für $a \in R \setminus \{0\}$ sei $v_p(a) \in \mathbb{N}_0$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von a. Zeigen Sie, daß v_p zu einer surjektiven Funktion $v\colon K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften

(i) $v(ab) = v(a) + v(b)$

(ii) $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$

fortgesetzt werden kann.

38. Sei K ein Körper und $v\colon K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion mit den Eigenschaften i, ii aus Bsp. 37. Dann gilt für $a, b \in K \setminus \{0\}$:

$$v(a) \neq v(b) \Longrightarrow v(a+b) = \min(v(a), v(b))$$

Wenn man $v(0) = \infty$ definiert, dann gilt diese Beziehung (sowie auch Eigenschaften i, ii) für alle $a, b \in K$.

39. Sei K ein Körper und $v\colon K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion mit den Eigenschaften i, ii aus Bsp. 37. Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$ fix. (In Bsp. 37 mit $R = \mathbb{Z}$ würde man üblicherweise $c = 1/p$ wählen.) Definieren wir für $a \in K$: $|a| = c^{v(a)}$, dann ist $d(a, b) = |a - b|$ eine Metrik auf K.

40. Für $1 \leq i \leq n$ sei R_i ein Ring mit Eins. Dann ist jedes Ideal von $R_1 \times \ldots \times R_n$ der Form $I_1 \times \ldots \times I_n = \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_j \in I_j\}$, wobei I_j ein Ideal von R_j ist.

41. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, I ein Ideal von R und $I[x]$ das Ideal von $R[x]$ bestehend aus jenen Polynomen, deren Koeffizienten alle in I liegen.

(i) Geben Sie einen Isomorphismus an $\varphi\colon (R/I)[x] \to R[x]/I[x]$.

(ii) $\psi\colon R[x] \to (R/I)[x]$, gegeben durch $\psi(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + I) x^k$, ist ein Ringepimorphismus.