25. Sei R ein Ring. Für A, $B \subseteq R$ sei $AB = \{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}$ und $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Sei $a \in R$, und A, B, $C \subseteq R$. Dann gilt (mit der Notation $\trianglelefteq$ für „ist Ideal von"):

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A(BC) = (AB)C$

(iii) wenn $A \trianglelefteq R$ und $B \trianglelefteq R$, dann auch $A + B \trianglelefteq R$ und $AB \trianglelefteq R$

(iv) wenn $A \trianglelefteq R$ und R ein Einselement hat, dann gilt $RA = AR = A$

(v) B bzgl. $+$ abgeschlossen $\implies$ $aB = \{a \cdot b \mid b \in B\}$ und $Ba = \{b \cdot a \mid b \in B\}$.

26. Sei R ein Ring, und A, B, B_1, $\ldots$, B_n, C Teilmengen von R. Wenn $0 \in B$ und $0 \in C$, dann $A(B+C) = AB+AC$ und $(B+C)A = BA+CA$.

Etwas allgemeiner gilt: wenn $0 \in B_i$ für $1 \le i \le n$, dann

$$A(B_1 + \ldots + B_n) = AB_1 + \ldots + AB_n \quad \text{und} \quad (B_1 + \ldots + B_n)A = B_1A + \ldots + B_nA.$$

27. Geben Sie einen Isomorphismus an zwischen $M_n(R[x])$, dem Ring der $n \times n$ Matrizen mir Eintragungen im Polynomring $R[x]$, und $M_n(R)[x]$, dem Polynomring in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in $M_n(R)$. (Hiebei ist R ein kommutativer Ring mit Eins.)

28. Seien f, g und h Polynome in $R[x]$ (R ein kommutativer Ring mit Eins), davon f ein normiertes Polynom (d.h. mit Leitkoeffizient 1) sodaß $f \cdot g = h$. Sei S ein Unterring von R. Zeigen Sie: wenn f und h in $S[x]$, dann auch $g \in S[x]$.

29. Sei R ein Euklidischer Ring, dessen Rangfunktion $\rho(ab) \ge \rho(a)$ (für $a, b \in R$ mit $ab \ne 0$) erfüllt. Zeigen Sie: $u \in R$ ist Einheit genau dann, wenn u minimalen Rang hat (d.h. $\rho(u) = \min\{\rho(a) \mid a \in R \setminus \{0\}\}$).

30. Sei D ein Integritätsbereich und kein Körper, dann ist $D[x]$ kein Hauptidealring. (Betrachten Sie das Ideal jener Polynome, deren konstanter Term in I liegt, I ein nichttriviales Ideal von D.)

31. (i) Sei I ein Ideal von R, dann ist $R/I \ne (0)$ und nullteilerfrei genau dann, wenn $I \ne R$ und für alle a, $b \in R$ gilt: $ab \in I \Longrightarrow a \in I \vee a \in I$.

(ii) Sei R kommutativer Ring mit Eins, P Ideal von R, dann gilt

$$P \text{ Primideal} \iff R/P \text{ Integritätsbereich}$$

32. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, a, b, $d \in R$, d kein Nullteiler. Wenn $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ wobei $a = da'$, $b = db'$, dann gilt $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$.

33. Sei R ein ZPE-Ring und a, b, $c \in R$. Wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $a \mid bc$, dann folgt $a \mid c$.