Algebra Übungen 2 WS 04/05

14. Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus [bzw. Ringhomomorphismus], $\leq$ heisse *Untergruppe* [bzw. *Unterring*], $\trianglelefteq$ heisse *Normalteiler* [bzw. *Ideal*], dann gilt
(i) $A \leq G \implies f(A) \leq H$,
(ii) $B \trianglelefteq G \implies f(B) \trianglelefteq f(G)$ (aber $B \trianglelefteq G \not\Longrightarrow f(B) \trianglelefteq H$),
(iii) $K \leq H \implies f^{-1}(K) \leq G$,
(iv) $M \trianglelefteq H \implies f^{-1}(M) \trianglelefteq G$.

15. Sei R kommutativer Ring mit 1. Im Ring $M_n(R)$ hat jedes Ideal die Form $M_n(I)$ für ein Ideal I von R. (Hinweis: gegeben ein Ideal J von $M_n(R)$, sei I das von allen Eintragungen in Matrizen in J erzeugte Ideal von R. Betrachten Sie weiters Produkte von Matrizen (von rechts und links) mit Matrixeinheiten wie e_{ij}, der Matrix, die an der Stelle (i, j) die Eintragung 1 hat, sonst nur 0.)

16. $\mathbb{Z}_n$ bezeichne die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. $f: \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3,\ f(x+9\mathbb{Z}) = x+3\mathbb{Z}$ ist ein Gruppen-Epimorphismus, der keine Rechtsinverse, die Gruppen-Homomorphismus ist, hat.

17. $g: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9,\ \ g(x + 3\mathbb{Z}) = 3x + 9\mathbb{Z}$ ist ein Gruppen-Monomorphismus, der keine Linksinverse, die Gruppen-Homomorphismus ist, hat.

18. (i) Eine endliche Teilmenge $H \neq \emptyset$ einer Gruppe G ist schon eine Untergruppe, wenn nur $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.
(ii) Für unendliche Teilmengen stimmt das nicht. (Finden Sie zusätzlich zu den in Vorlesung und Skriptum genannten ein weiteres Gegenbeispiel).

19. Sei $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, e_G, e_H das neutrale Element in G bzw. H, dann gilt

$$f(e_G) = e_H \quad \text{und} \quad \forall a \in G\ f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

Ausserdem gilt für jedes Element a von endlicher Ordnung $|a|$ in G: die Ordnung von $f(a)$ in H teilt $|a|$.

20. Seien f und g Gruppenhomomorphismen, $f, g: G \to H$ und $A \subseteq G$. Dann gilt
(i) $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$
(ii) Wenn $\forall\, a \in A\ \ f(a) = g(a)$, dann $\forall\, b \in \langle A \rangle\ \ f(b) = g(b)$.
(Wie lautet das Analogon für Ringhomomorphismen?)

21. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $(C_n, \cdot)$ die zyklische Gruppe der Ordnung n. Bestimmen Sie
(i) alle Gruppenhomomorphismen $\varphi: C_n \to C_m$
(ii) alle Automorphismen von C_n

22. Sei R ein Ring, $a, b \in R$. Dann gilt $(ab) \subseteq (a)(b)$.
Wenn R kommutativ ist, dann gilt $(ab) = (a)(b)$.

23. Welche der folgenden Gruppen sind zueinander isomorph? 1) $\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\big)$ 2) $\big(\mathbb{R}, +\big)$ 3) $S^1 = \big(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot\big)$ 4) $\big(\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \cdot\big)$ 5) $\big(\mathbb{R}, +\big)/\big(\mathbb{Z}, +\big)$

24. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G, dann ist die Klasse von e ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$, und es gilt: $a \equiv b$ genau dann, wenn $a^{-1}b \in N$.